



Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

Trabajo de fin de grado

Curso académico 2015/2016

Trenzas y nudos

Miguel Ángel Navarro Pérez

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar al lector la fuerte relación entre la teoría de trenzas y la teoría de nudos, dos ramas de la topología de baja de dimensión más próximas de lo que parece.

La primera parte de este estudio está dedicada a los conceptos y resultados básicos acerca de teoría de trenzas, que nos ayudarán a cumplir nuestro objetivo.

En segundo lugar, introduciremos la noción de nudo matemático y explicaremos cómo formarlos a partir de trenzas. En esta sección daremos dos grandes resultados: los Teoremas de Alexander y de Markov.

Por último, nos aproximaremos a la construcción original del polinomio de Jones, un invariante de nudos, a partir de grupos de trenzas, lo que pone de manifiesto la estrecha relación entre estas disciplinas.

Palabras clave: Trenza, Nudo, Polinomio de Jones.

Abstract

The main goal of this research is to show the reader the connection between Braid and Knot Theories, two branches of Low-Dimensional Topology that are closer than they seem to be.

The first part of our study is devoted to the concepts and basic results about Braid Theory, that will help us to fulfill our aim.

Secondly, we will introduce the concept of mathematical knot and we will explain how to build knots from braids. In this part, we will study two great results: Alexander's and Markov's Theorems.

Finally, we will point out the original definition of the Jones polynomial, a knot invariant, from braid groups, that shows the close connection between both disciplines.

Key words: Braid, Knot, Jones polynomial.

Índice

1. Introducción	7
2. Trenzas: conceptos básicos	8
2.1. Definiciones y ejemplos	8
2.2. Equivalencia de trenzas	9
2.3. Proyecciones y diagramas	10
3. Estructura de grupo	12
3.1. Trenzas elementales	15
3.2. Presentación del grupo de trenzas	18
4. Invariantes de trenza	22
4.1. El número de hebras de una trenza	22
4.2. La permutación asociada a una trenza	23
4.3. Subgrupo de trenzas puras	25
4.4. El exponente de una trenza	26
5. Algoritmo de peinado	28
5.1. El algoritmo	28
5.2. Trenzas peinadas	30
6. Relación trenzas - nudos	35
6.1. Nudos: conceptos básicos	35
6.2. Invariantes de nudos	38
6.3. Cerraduras de trenzas	39
6.4. Equivalencia de Markov	43
7. El polinomio de Jones	47
7.1. Diagramas de Temperley-Lieb	47
7.2. El álgebra de Temperley-Lieb	50
7.3. La traza de Markov	51

7.4. La construcción del polinomio	52
7.5. Cálculo del polinomio de Jones: ejemplo	53
Referencias	57

1. Introducción

Desde la antigüedad las trenzas y los nudos han sido utilizados como elementos decorativos presentes en la arquitectura y el arte. La belleza de estos objetos geométricos dio lugar al nacimiento de las teorías de trenzas y de nudos, ramas de la topología de baja dimensión que generalizan los conceptos cotidianos de trenza y nudo.

En 1925, el matemático Emil Artin presentó sus trabajos sobre teoría de trenzas. El primer y sorprendente resultado que veremos en este trabajo es que el conjunto de trenzas, de un número de hebras prefijado, dotado del producto de trenzas, que definiremos más adelante, forma grupo. Este hecho facilitó el estudio y la clasificación de las trenzas desde un punto de vista algebraico y no solo geométrico.

Hoy en día, el problema de clasificación de trenzas está resuelto y existen algoritmos capaces de distinguir entre dos trenzas dadas o, por el contrario, decir si son iguales, es decir, si su “patrón de trenzado” es el mismo.

Sin embargo, el problema de clasificación de trenzas según la equivalencia de Markov sigue abierto.

La segunda parte de este trabajo se centra en la relación entre trenzas y nudos. Para ello, daremos las nociones básicas de teoría de nudos necesarias para nuestro estudio e inmediatamente veremos cómo construir nudos a partir de trenzas. Las preguntas que nos planteamos son:

- ¿Podemos deshacer el proceso y obtener trenzas a partir de nudos?
- ¿Qué relación guardan las trenzas que generan nudos equivalentes?

Dos grandes teoremas nos dan las respuestas. En primer lugar, el *Teorema de Alexander* establece que todo nudo proviene de cerrar una trenza. Por otra parte, el *Teorema de Markov* responde a la segunda pregunta. Juntos ponen de manifiesto la conexión entre trenzas, nudos y sus respectivas relaciones de equivalencia.

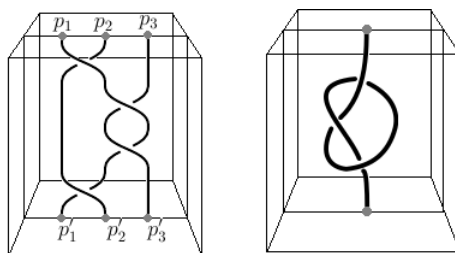
Por último, estudiaremos la construcción del polinomio de Jones a partir de álgebras de Temperley-Lieb y grupos de trenzas. Este polinomio, descubierto por el matemático Vaughan Frederick Randal Jones en 1984, resultó ser un invariante de nudos. Así, el problema de clasificación de nudos puede replantearse en función de trenzas. Este resultado fue premiado con la Medalla Fields en el año 1990 y con él concluimos nuestro trabajo, poniendo de manifiesto cómo se complementan ambas, todavía abiertas, disciplinas.

2. Trenzas: conceptos básicos

2.1. Definiciones y ejemplos

Definición 2.1 Consideremos el cubo $D = [0, 1]^3$ y fijemos $2n$ puntos: $\{p_1, \dots, p_n\}$ en la base superior y $\{p'_1, \dots, p'_n\}$ en la base inferior. Llamaremos **trenza geométrica** de n hebras (o n -trenza) al objeto que resulta de unir los puntos p_1, \dots, p_n con p'_1, \dots, p'_n , con la condición de que cada plano horizontal, que divide al cubo en dos, corte a cada hebra en un único punto.

Podemos pensar que cada n -trenza es una colección de n caminos que conectan los puntos p_1, \dots, p_n con p'_1, \dots, p'_n (no necesariamente en este orden), fluyendo siempre en la misma dirección: de arriba a abajo. Nos referiremos a cada uno de estos caminos como **hebra** o **arco** y los denotaremos por $\{d_i, i = 1, \dots, n\}$.



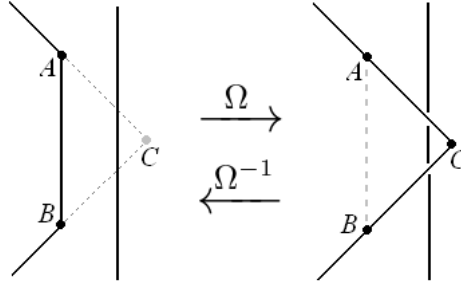
A la izquierda, una 3-trenza. La figura de la derecha no es una trenza.

Según esta definición, podemos aceptar como trenzas determinados objetos de trenzado infinito, denominados **trenzas salvajes**. A partir de ahora, exluiremos estas trenzas de nuestro estudio y nos centraremos en las **trenzas dóciles**, cuyas hebras pueden reemplazarse por segmentos poligonales. Por lo tanto, cada hebra puede verse como la unión de un conjunto finito de puntos, a los que llamaremos **vértices**, y de segmentos abiertos de recta.

Definición 2.2 Sea d una hebra de una n -trenza β y AB un segmento de d . Tomemos un punto C en el interior del cubo D , de forma que:

- el triángulo ABC no corta a ninguna hebra de β , salvo a d a lo largo de AB .
- $AC \cup CB$ corta a cada plano horizontal en un punto.

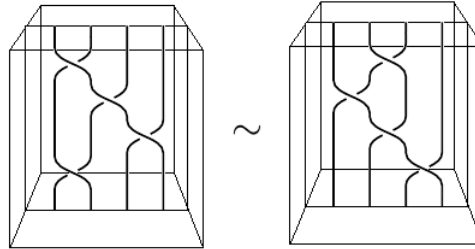
Denotaremos por Ω a la sustitución de AB por $AC \cup CB$ y por Ω^{-1} a la operación inversa. Llamaremos **movimiento elemental** a cualquiera de las dos operaciones Ω, Ω^{-1} .



Observación 2.3 Las condiciones expuestas en la definición anterior, aseguran que el objeto obtenido tras aplicar movimientos elementales a una n -trenza sigue siendo una n -trenza.

2.2. Equivalencia de trenzas

Intuitivamente, diremos que dos n -trenzas son equivalentes si sus hebras están entrelazadas del mismo modo, es decir, si podemos deformar una en la otra de manera continua sin alterar la disposición de sus extremos. En la siguiente figura, podemos ver que trenzas aparentemente distintas pueden seguir el mismo patrón de trenzado; esto es, son la “misma” trenza.



A continuación, daremos una definición formal de equivalencia de trenzas.

Definición 2.4 Diremos que dos n -trenzas β y β' son **equivalentes** y lo denotaremos por $\beta \sim \beta'$ si existe una secuencia finita de n -trenzas $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ de modo que $\beta = \beta_0$, $\beta' = \beta_m$ y cada par β_i, β_{i+1} está relacionado por un único movimiento elemental, para $i = 0, \dots, m - 1$, es decir, si podemos establecer la cadena

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_m = \beta'.$$

Observación 2.5 *Es fácil probar que la equivalencia de trenzas (\sim) constituye una relación de equivalencia sobre el conjunto de n -trenzas.*

A partir de ahora, trenzas equivalentes serán consideradas como “iguales”, por lo que definimos el conjunto B_n como sigue:

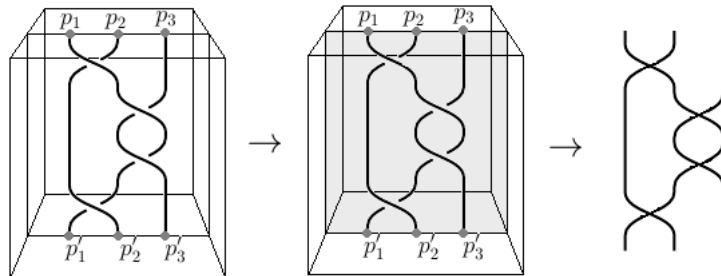
Definición 2.6 *Denotaremos por B_n al cociente del conjunto de n -trenzas por la relación de equivalencia de trenzas, \sim . En otras palabras, B_n representa el conjunto de n -trenzas no equivalentes.*

Notemos que los elementos de B_n son las clases de equivalencia definidas por \sim . Las trenzas de la figura anterior representan el mismo elemento del conjunto B_3 .

2.3. Proyecciones y diagramas

Hasta este momento, hemos tratado las trenzas como objetos tridimensionales pero para un estudio más sencillo de sus propiedades topológicas y algebraicas es necesario hacer las siguientes precisiones.

Definición 2.7 *Sea β una n -trenza en el espacio \mathbb{R}^3 y $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una proyección. Diremos que $p(\beta)$ es una **proyección regular** de la n -trenza β en el plano si la preimagen de cada punto contiene, a lo sumo, dos puntos.*



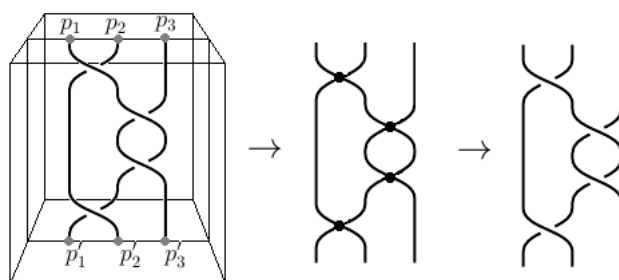
Como podemos ver en la figura anterior, al pasar de un objeto en tres dimensiones a otro en dos, se ha perdido cierta información del trenzado de β , por lo que el concepto de proyección regular no es suficiente para reducir la dimensión de las trenzas. Por ello, daremos la siguiente definición:

Definición 2.8 *Dada una n -trenza β , supongamos que $p(\beta)$ es una proyección regular de β . En cada punto de intersección de $p(\beta)$ procedemos al borrado de parte de la hebra más cercana al plano sobre el que se proyecta. De este modo, queda claro cómo están entrelazadas las hebras de β en una figura bidimensional a la que llamaremos **diagrama***

regular (o *diagrama*) de β . Los elementos del diagrama son:

- *arcos o hebras*
- *cruces*

Los arcos que quedan por encima en los cruces se llaman **overpass**. Los que quedan por debajo, **underpass**.



Trenza tridimensional, proyección y diagrama.

Hemos explicado cómo obtener un diagrama a partir de una trenza tridimensional. Para obtener una trenza a partir de su diagrama, basta elevar mínimamente las hebras del *overpass*, obteniendo una figura en tres dimensiones.

El hecho de que el camino trenza-diagrama sea “de ida y vuelta” nos permite decidir si dos trenzas son o no equivalentes fijándonos únicamente en sus diagramas. Por ello, en muchas ocasiones nos referiremos a los diagramas con el término “trenza”.

3. Estructura de grupo

Consideremos el conjunto de n -trenzas no equivalentes, B_n . Definimos el producto (o composición) de dos trenzas β_1, β_2 como la yuxtaposición las mismas, haciendo coincidir los puntos finales de β_1 con los puntos de inicio de β_2 . De este modo, obtenemos una nueva n -trenza que recoge el trenzado de β_1 y β_2 .

A lo largo de esta sección, probaremos que el conjunto B_n , dotado del producto de trenzas, tiene estructura de grupo no abeliano.

Proposición 3.1 *El producto de trenzas respeta la equivalencia de trenzas. En otras palabras, si $\beta \sim \beta'$ y $\bar{\beta} \sim \bar{\beta}'$ entonces $\beta\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta}'$*

Demostración. Por ser $\beta \sim \beta'$ y $\bar{\beta} \sim \bar{\beta}'$, según la definición de equivalencia de trenzas, podemos establecer las cadenas:

$$\begin{aligned}\beta &= \beta_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_m = \beta'. \\ \bar{\beta} &= \bar{\beta}_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \bar{\beta}_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \bar{\beta}_l = \bar{\beta}'.\end{aligned}$$

La primera cadena, induce la secuencia

$$\beta\bar{\beta} = \beta_0\bar{\beta} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1\bar{\beta} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_m\bar{\beta} = \beta'\bar{\beta}.$$

La segunda, por su parte,

$$\beta'\bar{\beta} = \beta'\bar{\beta}_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta'\bar{\beta}_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta'\bar{\beta}_l = \beta'\bar{\beta}'.$$

En virtud de la transitividad de \sim , queda probado que $\beta\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta}'$. ■

Esta proposición pone de manifiesto que la elección del representante de cada clase es indiferente a la hora de calcular la trenza producto. Veamos qué otras buenas propiedades presenta el producto de trenzas.

Proposición 3.2 *El producto de trenzas es asociativo.*

Demostración. Según la definición del producto de trenzas como yuxtaposición, es evidente que, dadas tres n -trenzas β_1, β_2 y β_3 , obtenemos la misma trenza al efectuar los productos $(\beta_1\beta_2)\beta_3$ y $\beta_1(\beta_2\beta_3)$. ■

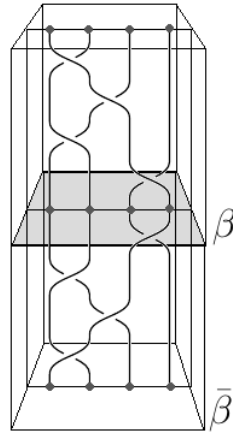
Definición 3.3 *Para cada $n \geq 1$, definimos la n -trenza trivial como la trenza que une cada p_i con el respectivo p'_i , $i = 1, \dots, n$, sin crear ningún cruce. En otras palabras, es una colección de n segmentos "no trenzados". La denotaremos 1_n .*

Proposición 3.4 Para cada n -trenza $\beta \in B_n$, se verifica $1_n\beta \sim \beta 1_n \sim \beta$. Esto es: la n -trenza trivial juega el papel de **elemento neutro** para el producto de trenzas.

Demostración. La prueba es inmediata, pues la yuxtaposición de la n -trenza trivial no es más que un alargamiento de las hebras de β , lo que no altera su trenzado. ■

Hasta ahora, tenemos un conjunto dotado de una operación asociativa y con elemento neutro. Para ver que B_n es grupo, solo debemos comprobar que todo elemento tiene inverso. Para ello, damos la siguiente definición.

Definición 3.5 Dada una trenza $\beta \in B_n$ en el cubo D . Pensemos en la base inferior de D como un espejo y consideremos la trenza $\bar{\beta}$, que resulta de reflejar β . Diremos que toda trenza construida mediante este procedimiento es la **trenza reflejo** de la trenza de partida.

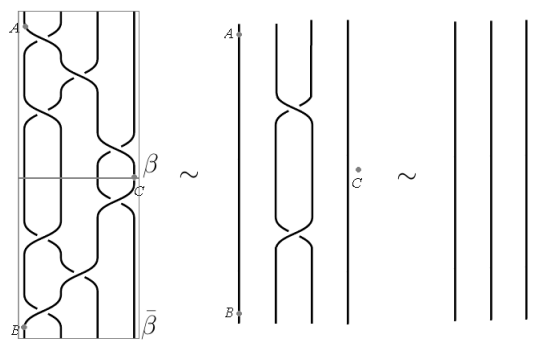


Proposición 3.6 Sea $\beta \in B_n$ una n -trenza y consideremos su trenza reflejo $\bar{\beta}$. Se prueba que $\beta\bar{\beta} = \bar{\beta}\beta = 1_n$.

Demostración. La prueba se basa en que, por construcción, $\bar{\beta}$ deshace el trenzado de β y, por lo tanto, tras un número finito de movimientos elementales, obtenemos la n -trenza trivial. Por ello, $\beta\bar{\beta} = 1_n$.

Para ver que $\bar{\beta}\beta = 1_n$, basta considerar que β es la trenza reflejo de $\bar{\beta}$. ■

Ejemplo 3.7 En la siguiente figura se puede observar cómo la trenza reflejo deshace el trenzado.



Teorema 3.8 Para cada $n > 1$, el conjunto B_n dotado del producto de trenzas es un grupo, conocido como **grupo de n -trenzas** (o grupo de Artin).

Demostración. Basta tener en cuenta que:

- El producto de trenzas respeta las clases de equivalencia definidas por \sim , es decir, la operación está bien definida sobre los elementos de B_n .
- La operación es asociativa.
- La n -trenza trivial es el neutro para esta operación.
- Para cada $\beta \in B_n$, podemos definir su trenza reflejo, que juega el papel de inverso de β .

■

Ejemplo 3.9 Los primeros grupos de Artin son:

$n = 1$, $B_1 = \{1_1\}$ es el grupo trivial. Basta ver que toda 1-trenza es equivalente a la 1-trenza trivial.

$n = 2$, los elementos de B_2 son de la forma:



Notemos que si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, las trenzas β_n y β_m de la figura siguiente no son equivalentes.

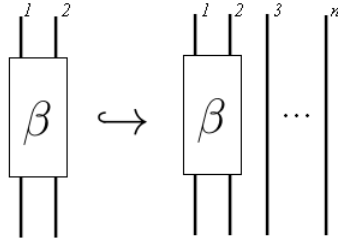
$$\underbrace{\quad}_{\beta_n} \cdot n \cdot \underbrace{\quad}_{\beta_m} \approx \underbrace{\quad}_{\beta_n} \cdot m \cdot \underbrace{\quad}_{\beta_m}$$

Se sigue que B_2 es un grupo infinito (ver Observación 4.19)

Proposición 3.10 Si $n \geq 2$, el grupo B_n es infinito.

Demostración. Si $n = 2$, por el ejemplo anterior, sabemos que B_2 es infinito.

Sea $n > 2$. Consideremos la inmersión natural de B_2 en B_n que asocia a cada 2-trenza, β , la n -trenza que resulta de añadirle $n - 2$ nuevas hebras sin trenzar.



De esta forma, podemos obtener infinitas n -trenzas no equivalentes (a partir de infinitas 2-trenzas distintas) y, por lo tanto, B_n es infinito. ■

3.1. Trenzas elementales

En general, dado un grupo, la primera pregunta que nos planteamos es si podemos encontrar una presentación, es decir, un subconjunto generador y una serie de relaciones que determinen por completo la estructura del grupo. El objetivo de esta sección es dar una presentación del grupo de n -trenzas. Para ello, prestaremos especial atención a las trenzas que recoge la siguiente definición.

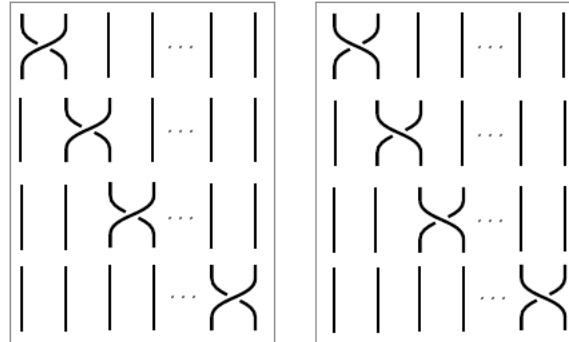
Definición 3.11 Dado un $n \geq 2$, consideremos el grupo B_n y las $n - 1$ n -trenzas definidas del siguiente modo:

Para cada $i = 1, \dots, n - 1$, σ_i es la trenza que conecta p_i con p'_{i+1} y p_{i+1} con p'_i con pendiente positiva en la hebra del overpass, dejando el resto de hebras sin trenzar.

Las trenzas $\{\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}\}$ son conocidas como **n -trenzas elementales**.

Observación 3.12 La trenza σ_i^{-1} , que se construye como la trenza reflejo de σ_i , es la

trenza que conecta p_i con p'_{i+1} y p_{i+1} con p'_i , con pendiente negativa en la hebra del overpass, dejando el resto de hebras sin trenzar.



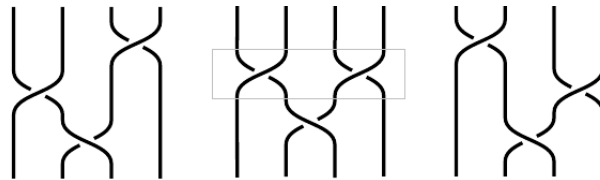
De arriba a abajo: $\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \sigma_3^{\pm 1}, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$.

La importancia de estas $2n - 2$ n -trenzas se pone de manifiesto en el siguiente resultado:

Proposición 3.13 *Toda n -trenza es producto de n -trenzas elementales.*

Demostración. Sea $\beta \in B_n$, tomemos un diagrama de β y dividámoslo en rectángulos, de modo que el número de cruces en cada rectángulo sea exactamente uno.

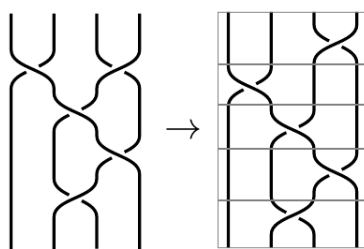
Notemos que en el caso de que dos (o más) cruces se produzcan a la vez, podemos obtener una trenza equivalente a β en la que no tengamos este problema. Basta desplazar mínimamente los cruces mediante movimientos elementales, sin alterar el trenzado de la trenza en cuestión.



Trenzas equivalentes en que se han desplazado cruces para evitar que se produzcan simultáneamente.

Por construcción, en cada rectángulo habrá un cruce entre dos hebras vecinas; en otras palabras: una trenza elemental. La yuxtaposición de los rectángulos no es más que la trenza de partida expresada como producto de trenzas elementales. ■

Ejemplo 3.14 *La siguiente figura muestra cómo obtener la palabra asociada a una 4-trenza dada:*



La trenza puede escribirse como el producto $\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2$

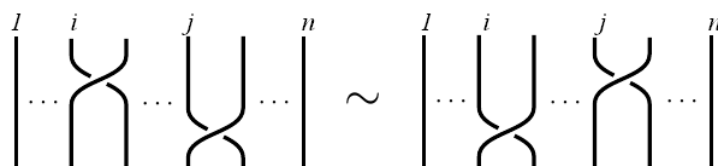
A pesar de haber encontrado un sistema generador de B_n , la representación de los elementos de B_n en función de los $\{\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}\}$ no es única:

Ejemplo 3.15 La 4-trenza $\sigma_1\sigma_3$ puede expresarse también como $\sigma_3\sigma_1$.



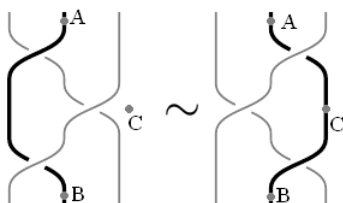
En general, si dos n -trenzas elementales sucesivas son tales que las hebras que intervienen en los cruces son distintas, podemos alterar el orden a nuestro antojo. Esto es,

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2$$



Esta propiedad se llama **casi-conmutatividad** del producto de trenzas.

Por otra parte, en B_3 es evidente que $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$. Basta tener en cuenta la figura siguiente:



donde se ha realizado un movimiento elemental sobre la segunda hebra.

En general, en B_n se satisface $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n-2$. Basta aplicar un movimiento elemental análogo al de la figura anterior a las tres hebras en cuestión.

3.2. Presentación del grupo de trenzas

Una vez hechas estas aclaraciones sobre la escritura de los elementos de B_n , podemos dar el siguiente resultado.

Teorema 3.16 (*Artin, 1925*) Dado $n \geq 3$, B_n queda determinado según la **presentación de Artin**:

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{si } i = 1, \dots, n-2 \end{array} \right\rangle$$

Demostración. Dado un grupo abstracto, G , con presentación

$$G = \left\langle x_1, \dots, x_{n-1} \mid \begin{array}{ll} x_i x_j = x_j x_i & \text{si } |i - j| \geq 2; \\ x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} & \text{si } i = 1, \dots, n-2 \end{array} \right\rangle$$

veamos que G es isomorfo al grupo de n -trenzas, B_n .

Para ello, consideremos la aplicación $\varphi : G \rightarrow B_n$ tal que a cada palabra $W = x_{i_1}^{e_1} \cdots x_{i_k}^{e_k} \in G$ le asocie $\varphi(W) = \varphi(x_{i_1}^{e_1} \cdots x_{i_k}^{e_k}) = \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k} \in B_n$, donde $e_j \in \{\pm 1\}$ para $j = 1, \dots, k$.

Veamos que tal aplicación es un isomorfismo de grupos entre G y B_n . En primer lugar, veamos que φ es homomorfismo de grupos. Es suficiente ver que φ lleva las relaciones de G en el neutro de B_n : la n -trenza trivial. Pero es fácil ver que

$$\varphi(x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}) = \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} = 1_n$$

para todo $i, j = 1, \dots, n-1$ satisfaciendo $|i - j| > 2$.

$$\varphi(x_i x_{i+1} x_i x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}^{-1}) = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = 1_n$$

para todo $i = 1, \dots, n-2$.

Por lo tanto, φ es un homomorfismo entre los dos grupos.

Además, φ es suprayectivo: dado $\beta \in B_n$, podemos expresarla como $\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_r}^{e_r}$ donde $i_j \in \{1, \dots, n-1\}$ y $e_j \in \{\pm 1\}$ para todo $j = 1, \dots, r$. Basta tomar el elemento $W = x_{i_1}^{e_1} \cdots x_{i_r}^{e_r} \in G$, cuya imagen es, precisamente, β .

Por lo tanto, si probamos que φ es inyectiva, tendremos un isomorfismo entre G y B_n y habremos probado el resultado.

Dados dos elementos $g, g' \in G$ tales que $\varphi(g) = \varphi(g')$. Consideremos las trenzas $\beta = \varphi(g)$ y $\beta' = \varphi(g')$. Puesto que $\varphi(g) = \varphi(g')$, dichas trenzas deben ser equivalentes, es decir, podemos construir la cadena finita de n -trenzas intermedias

$$\beta = \beta_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_2 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \cdots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_s = \beta'.$$

verificando que cada par de trenzas difiere en un único movimiento elemental.

Dado que φ es suprayectiva, para cada β_i existe algún $W_i \in G$ cuya imagen por φ es β_i . Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama:

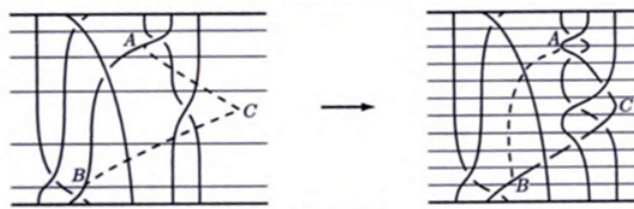
$$\begin{array}{ccccccc} \beta & = & \beta_1 & \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} & \beta_2 & \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} & \cdots & \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} & \beta_s & = & \beta' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ g & = & W_1 & & W_2 & & & & W_s & = & g' \end{array}$$

Si probamos que $W_i \sim_R W_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, donde \sim_R denota las reducciones que podemos hacer a partir de las relaciones de G ; tendremos que $g = g'$.

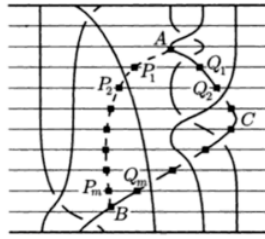
Consideremos la porción del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \beta_i & \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} & \beta_{i+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ W_i & & W_{i+1} \end{array}$$

Notemos que cada β_{i+1} se obtiene a partir de β_i mediante un movimiento elemental. Este tipo de movimientos introduce los arcos AC y CB , creando nuevos cruces en β_{i+1} . Por otra parte, los cruces en que el arco AB estaba involucrado desaparecen. Tomemos diagramas D_i, D_{i+1} de β_i, β_{i+1} , respectivamente y consideremos sendas particiones en rectángulos, verificando que únicamente se produce un cruce en en cada región rectangular.

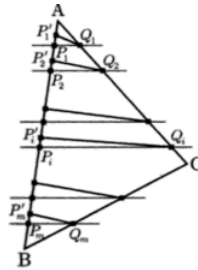


Los arcos AB y $AC \cup CB$ cortan los segmentos que dividen el diagrama en los puntos P_1, \dots, P_m y Q_1, \dots, Q_m , respectivamente, como se muestra en la siguiente figura:



Sean P'_1, \dots, P'_m m puntos en el arco AB , verificando:

- Cada P'_j está por encima del respectivo P_j
- Ningún triángulo definido por los puntos $P'_j Q_j P_j$ contiene cruces de β_i ni de β_{i+1} .



Reemplacemos el arco AQ_1 por $AP'_1 \cup P'_1 Q_1$ y, a continuación, $P'_1 Q_1 \cup Q_1 Q_2$ por $P'_1 P'_2 \cup P'_2 Q_2$. Esta operación recibe el nombre de **movimiento quasi-elemental** y consiste en un par de movimientos elementales sucesivos.

Repetimos este procedimiento hasta llegar a $P'_m Q_m \cup Q_m B$ y reemplazamos este último arco por $P'_m B$. Tenemos la cadena intermedia (entre β_{i+1} y β_i):

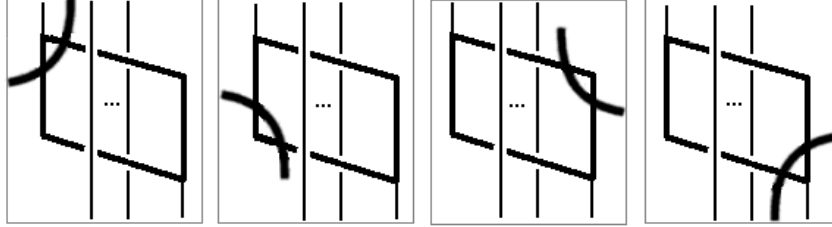
$$\beta_{i+1} = \gamma_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \gamma_1 \xrightarrow{q-e} \gamma_1 \xrightarrow{q-e} \dots \xrightarrow{q-e} \gamma_m \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \gamma_{m+1} = \beta_i.$$

donde γ_0, γ_1 y γ_m, γ_{m+1} están relacionados por un único movimiento elemental y cada par γ_j, γ_{j+1} , por el movimiento quasi-elemental consistente en la sustitución de $P'_j Q_j \cup Q_j Q_{j+1}$ por $P'_j P'_{j+1} \cup P'_{j+1} Q_{j+1}$, para $j = 1, \dots, m$.

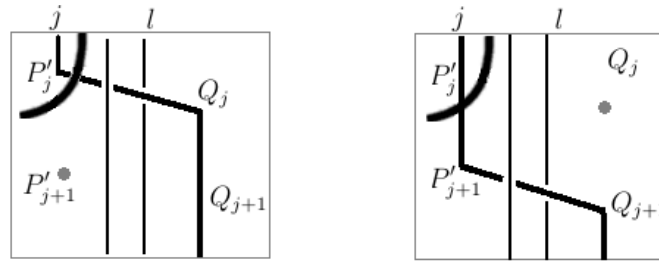
De nuevo, en virtud de la suprayectividad de φ , podemos encontrar elementos de G , X_1, \dots, X_{m+1} tales que $\varphi(X_j) = \gamma_j$, $j = 1, \dots, m+1$. Nuestro objetivo es expresar cada γ_j en función de los generadores para obtener explícitamente los X_j .

Notemos que cada hebra que entre al cuadrilátero con vértices $P'_j Q_j Q_{j+1} P'_{j+1}$ por encima (debajo) de un arco, debe salir por encima (debajo) del mismo arco, deshaciendo

el cruce que crea pues, por construcción, no hay cruces en cada triángulo $P'_j Q_j P_j$, contenido en $P'_j Q_j Q_{j+1} P'_{j+1}$



Analizaremos el primer caso:



Paso de γ_i y γ_{i+1} .

Si expresamos el trenzado de γ_j y γ_{j+1} en función de los generadores, obtenemos que $\gamma_j = \gamma'_j \sigma_j^{e_j} \sigma_{j+1}^{e_{j+1}} \cdots \sigma_l^{e_l} \gamma''_j = \gamma_{j+1}$; $e_k = \pm 1$, para $k = j, \dots, l$. Donde las palabras γ'_j, γ''_j denotan la parte común a las trenzas γ_{j+1} y γ_j , es decir, los cruces anteriores y posteriores al cuadrilátero $P'_j Q_j Q_{j+1} P'_{j+1}$.

Por lo tanto, $\gamma_j = \gamma_{j+1}$ y podemos expresar $X_j = X_{j+1} = X'_j x_j^{e_j} x_{j+1}^{e_{j+1}} \cdots x_l^{e_l} X''_j$, donde las palabras X'_j, X''_j son las preimágenes de γ'_j, γ''_j . Así, obtenemos $X_j = X_{j+1}$. La arbitrariedad del subíndice $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ nos lleva que $W_i = X_{m+1} = X_0 = W_{i+1}$. De nuevo, la elección arbitraria de $i \in \{1, \dots, s-1\}$ nos da la igualdad deseada $g = W_1 = W_s = g'$.

Este procedimiento puede aplicarse a cualquiera de los casos propuestos, concluyendo que la aplicación φ es inyectiva y, por lo tanto, un isomorfismo entre los grupos G y B_n . ■

4. Invariantes de trenza

Ahora que hemos definido perfectamente las trenzas como elementos de grupos con una presentación conocida, podemos tratarlas de forma algebraica. Es decir, pasar de un objeto geométrico a una expresión de los generadores del grupo. Esto nos permite saber si dadas dos trenzas, en principio distintas, estamos tratando el mismo objeto sin necesidad de recurrir a los movimientos elementales, sino a expresiones algebraicas. Éste es el conocido **problema de la palabra**.

Definición 4.1 *Dadas dos n -trenzas β_1, β_2 diremos que son equivalentes si podemos expresarlas con la misma palabra. Esto es, si podemos reducir, utilizando las relaciones de B_n , una palabra a la otra.*

Este procedimiento, sin embargo, no es del todo sencillo. Por ello, en la práctica, además de algoritmos capaces de distinguir entre dos trenzas dadas, se utilizan lo que se conoce como **invariantes de trenza**. En esta sección daremos algunos ejemplos de éstos y pondremos de manifiesto la estrecha relación entre algunos invariantes y la estructura de grupo del conjunto de n -trenzas.

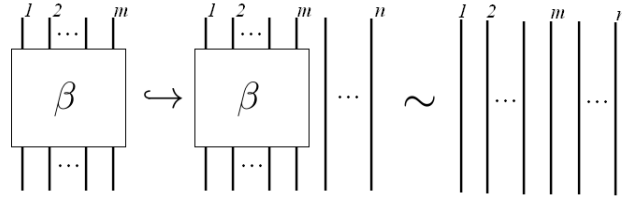
Observación 4.2 *Diremos que una propiedad es un invariante de trenza si se conserva por equivalencia de trenzas, es decir, si dos trenzas son equivalentes y una de ellas satisface un invariante de trenza, la otra también lo hará.*

4.1. El número de hebras de una trenza

Es evidente que dos trenzas equivalentes, en particular, tienen el mismo número de hebras. Por lo tanto, nos encontramos ante el ejemplo más sencillo de invariante. Este invariante da lugar a la siguiente relación de subgrupos:

Proposición 4.3 *Sea $n \geq 2$ y consideremos el grupo B_n . Tomemos $m \leq n$. La aplicación $\psi : B_m \longrightarrow B_n$ que a cada trenza en B_m le asocia la trenza resultante de añadirle $n - m$ hebras es un monomorfismo.*

Demostración. Dado que las restricciones de B_m se verifican en B_n , se sigue que ψ es un homomorfismo. Para ver que es inyectivo, tomemos una m -trenza en el núcleo de ψ y veamos que necesariamente es la m -trenza trivial. Sea $\beta \in \ker(\psi)$, es decir, $\psi(\beta) = \beta' \sim 1_n$.



En otras palabras: $\beta \in B_m$ es tal que al añadirle $n - m$ hebras sin trenzar nos da una trenza, β' , equivalente a la n -trenza trivial. Por lo tanto, existe una secuencia finita de n -trenzas intermedias satisfaciendo el siguiente diagrama:

$$\beta' = \beta_0 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \cdots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_r = 1_n$$

Si restringimos a las m primeras hebras, tenemos:

$$\beta = \beta_0^{(m)} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_1^{(m)} \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \cdots \xrightarrow{\Omega^{\pm 1}} \beta_r^{(m)} = 1_m$$

donde $\beta_i^{(m)}$ denota la restricción a las m primeras hebras de β_i , con $i = 0, \dots, r$.

Por lo que queda probado que ψ es monomorfismo. ■

Corolario 4.4 Para cada $m \leq n$, el grupo B_n contiene subgrupos isomorfos a B_m .

Demostración. Basta considerar la aplicación definida en la Proposición anterior. Por el *Primer Teorema de Isomorfía*:

$$B_m = B_m / \ker(\psi) \cong \text{Im}(\psi) \leq B_n$$

se tiene el resultado. ■

4.2. La permutación asociada a una trenza

Dada β una trenza de n hebras, recordemos que β no es más que una colección de n caminos que lleva los puntos de origen p_1, \dots, p_n a los de destino p'_1, \dots, p'_n . De alguna forma, parte del trenzado de β es, precisamente, de dónde parten y a dónde llegan los arcos que la componen. Por lo tanto, es bastante razonable asociar a cada trenza una permutación según se indica en la siguiente definición.

Definición 4.5 Sea $\beta \in B_n$ y supongamos que la hebra j -ésima de β conecta el punto inicial p_j con el punto final p'_{i_j} , donde $1 \leq j, i_j \leq n$. Llamaremos **permutación asociada**

a la trenza β y la denotaremos $\pi(\beta)$ (o π_β) a la permutación

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.6

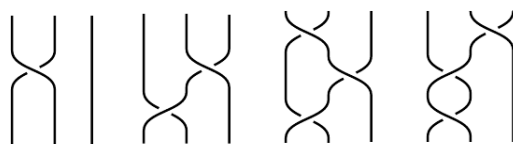
- La n -trenza trivial tiene como permutación asociada la identidad, que denotaremos id_n , de S_n .
- Para cada $i = 1, \dots, n-1$, la trenza elemental σ_i tiene permutación asociada la trasposición $(i \ i+1)$.

Observación 4.7 La permutación asociada al producto es el producto de las permutaciones.

Proposición 4.8 La permutación asociada a una trenza es un invariante de trenza. En otras palabras, si dos trenzas son equivalentes, su permutación asociada es la misma.

Demostración. Dadas dos n -trenzas equivalentes β_1 y β_2 , podemos deformar de manera continua una en la otra sin alterar la disposición de los extremos de las hebras. En particular, los arcos de las dos trenzas conectan del mismo modo los puntos p_1, \dots, p_n con p'_1, \dots, p'_n . Luego, las permutaciones $\pi(\beta_1)$ y $\pi(\beta_2)$ coinciden. ■

Observación 4.9 La permutación asociada permite probar que el producto de n -trenzas no es conmutativo para $n \geq 3$. Basta tomar las siguientes 3-trenzas:



De izquierda a derecha: $\beta_1 = \sigma_1^{-1}$, $\beta_2 = \sigma_2^{-1}\sigma_1$, $\beta_1\beta_2$ y $\beta_2\beta_1$

Al efectuar los productos $\beta_1\beta_2$ y $\beta_2\beta_1$, obtenemos dos trenzas con permutaciones $\pi(\beta_1\beta_2) = (1\ 3)$, $\pi(\beta_2\beta_1) = (2\ 3)$ distintas. Por lo que concluimos que el producto de trenzas no es conmutativo.

Observación 4.10 Notemos que el conjunto de trenzas equivalentes tiene la misma permutación asociada, sin embargo, el recíproco no es cierto. Es más, para cada permutación $\pi \in S_n$, existe un conjunto infinito de trenzas no equivalentes con permutación asociada π .

4.3. Subgrupo de trenzas puras

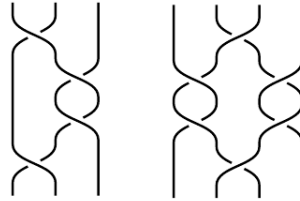
Como ya hemos dicho, la permutación asociada a la n -trenza trivial es $\pi(1_n) = id_n$ pero no es la única trenza satisfaciendo esta propiedad. Centrémonos en el subconjunto (no trivial) de B_n con permutación asociada la identidad. A lo largo de esta sección hablaremos de este conjunto especial de trenzas que definiremos a continuación.

Definición 4.11 Sea $\beta \in B_n$, diremos que β es una n -trenza **pura** si su permutación asociada es la identidad. Denotaremos al conjunto de n -trenzas puras como

$$P_n = \{\beta \in B_n : \pi(\beta) = id_n\}$$

Ejemplo 4.12

- Las trenzas $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$ y $\sigma_2\sigma_1^{-2}\sigma_3^2\sigma_2$ de la figura siguiente son puras.



- Para $n = 1$, $P_1 = B_1 = \{1_1\}$.
- Para $n = 2$, $P_2 = \langle \sigma_1^2 \rangle \leq \langle \sigma_1 \rangle = B_2$

El subconjunto de n -trenzas puras es importante a la hora de determinar si dos trenzas β_1, β_2 son equivalentes o no. Si lo fuesen, debería satisfacerse también $\beta_1^{-1} \sim \beta_2^{-1}$ y, por lo tanto, $\beta_1\beta_2^{-1} \sim 1_n$. De este modo, si β_1 y β_2 son equivalentes, la permutación asociada al producto $\beta_1\beta_2^{-1}$ es la identidad. En otras palabras, $\beta_1\beta_2^{-1}$ es una n -trenza pura.

Esta propiedad no parece muy interesante si pensamos en P_n como un simple subconjunto de B_n , sin embargo, la siguiente proposición deja claro que P_n tiene buenas propiedades algebraicas.

Proposición 4.13 P_n es subgrupo normal de B_n . Además, el cociente B_n/P_n es isomorfo al grupo simétrico S_n .

Demostración. Basta considerar la aplicación $f : B_n \longrightarrow S_n$, que envía cada n -trenza a su permutación asociada, que verifica:

- (i) es homomorfismo de grupos (Observación 4.7)
- (ii) es suprayectiva. (Observación 4.10)
- (iii) $\ker(f) = P_n$

Por (iii), queda probado que $P_n \trianglelefteq B_n$. Además, en virtud del *Primer Teorema de Isomorfía*, $B_n/P_n \cong S_n$ ■

4.4. El exponente de una trenza

En la sección anterior dimos la presentación del grupo B_n en función de los generadores $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ y el conjunto de relaciones

$$R = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2; \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{si } i = 1, \dots, n-2 \end{array} \right\}$$

De modo que cualquier $\beta \in B_n$ viene dada por una palabra de la forma $\sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k} \in B_n$, donde $e_j \in \{\pm 1\}$, $1 \leq i_j \leq n-1$, $j = 1, \dots, k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Definición 4.14 Sea una trenza $\beta \in B_n$ dada por la palabra $\sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}$, llamaremos *exponente de β* , y lo denotaremos $\exp(\beta)$, al entero $\sum_{j=1}^k e_j$.

La introducción de este término no es casual. A continuación, probaremos que el exponente de una trenza es un invariante .

Proposición 4.15 *El exponente de trenzas es un invariante de trenzas.*

Demostración. Consideremos una n -trenza, $\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}$ con exponente $\exp(\beta) = \sum_{j=1}^k e_j$. Todas las trenzas equivalentes a β tienen una palabra equivalente a $\sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}$, es decir, una palabra generada a partir de ésta en la que se han intercalado las relaciones de R . Por lo tanto, para ver que el exponente es un invariante de trenza, basta probar que las relaciones de R tienen exponente nulo. En efecto:

- $\exp(\sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1}) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$, para cualquier valor de $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$.
En particular, para $|i - j| \geq 2$.
- $\exp(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}) = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$, para $i = 1, \dots, n-2$

lo que concluye la prueba. ■

Del mismo modo que los invariantes anteriores, el exponente nos permite definir el siguiente subgrupo.

Definición 4.16 Dado $n \geq 1$, el subconjunto H_n de B_n viene dado por

$$H_n = \{\beta \in B_n : \exp(\beta) = 0\}$$

.

Observación 4.17

- Para $n = 1$: $H_1 = \{1_1\}$.
- Para $n = 2$: $H_2 = \{1_2\}$.

Proposición 4.18 Para cada $n \geq 2$, H_n es un subgrupo normal de B_n . Además, el cociente B_n/H_n es isomorfo al grupo aditivo \mathbb{Z} .

Demostración. Fijado $n \geq 2$, consideremos la aplicación $f : B_n \rightarrow \mathbb{Z}$ que a cada n -trenza le asocia su exponente. Tal f verifica:

- (i) es homomorfismo: dadas $\beta_1 = \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}$, $\beta_2 = \sigma_{j_1}^{r_1} \cdots \sigma_{j_l}^{r_l} \in B_n$, es evidente que $f(\beta_1\beta_2) = e_1 + \dots + e_k + r_1 + \dots + r_l = \exp(\beta_1) + \exp(\beta_2) = f(\beta_1) + f(\beta_2)$
- (ii) es suprayectiva, pues dado $m \in \mathbb{Z}$, siempre podemos considerar la n -trenza σ_1^m verificando $f(\sigma_1^m) = \exp(\sigma_1^m) = m$.
- (iii) $\ker(f) = H_n$, por la definición de H_n .

Por (iii), queda probado que $H_n \trianglelefteq B_n$ y, en virtud del *Primer Teorema de Isomorfía*, $B_n/H_n \cong \mathbb{Z}$ ■

Observación 4.19 El exponente de trenza permite probar la infinitud de los grupos de trenzas. Si consideramos el caso $n = 2$, es evidente que toda trenza es de la forma σ_1^k . Sabiendo que el exponente de trenza es un invariante, podemos afirmar que las 2-trenzas σ_1^k y σ_1^l son distintas para todo par $k \neq l$, es decir, el grupo B_2 es infinito.

5. Algoritmo de peinado

En esta sección, nos centraremos en cómo distinguir si dos trenzas dadas son la misma sin utilizar invariantes. Para ello daremos el algoritmo de **peinado de trenzas**, desarrollado por Artin, que resuelve el **problema de la palabra** en los grupos de trenzas.

Consideraciones previas:

- Si dos trenzas, β_1, β_2 , son equivalentes, la trenza $\beta_1\beta_2^{-1}$ es trivial.
- El problema de la palabra -poder afirmar que dos palabras dadas son o no la misma- se reduce a distinguir si una palabra representa o no la trenza trivial.
- La trenza trivial (de cualquier número de hebras) es pura.
- El problema de la palabra en el grupo de trenzas se reduce al grupo de trenzas puras.

Por todo lo anterior, el algoritmo de peinado de trenzas que daremos a continuación solo considera trenzas puras.

5.1. El algoritmo

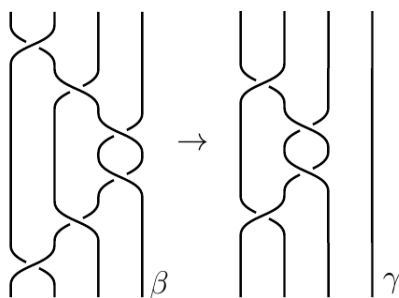
Tomemos $\beta \in B_n$:

Paso 1: Cálculo de la permutación asociada: $\pi(\beta)$

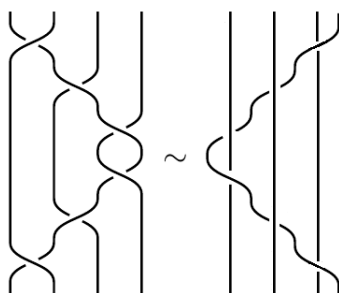
Si $\pi(\beta) \neq id_n$, $\beta \approx 1_n$

Si $\pi(\beta) \neq id_n$, Paso 2.

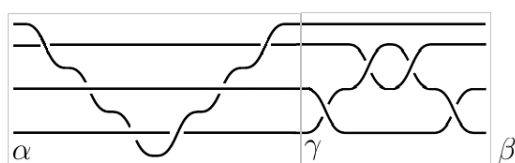
Paso 2: β es pura y, por lo tanto, conecta p_i con p'_i para cada $i = 1, \dots, n$. Sustituyamos la n -ésima hebra de β por una hebra sin trenzar como se muestra en la figura. Notemos que el resultado sigue siendo una trenza pura, a la que llamaremos γ .



Si efectuamos el producto $\alpha = \beta\gamma^{-1}$, obtenemos la siguiente n -trenza en la que las $n - 1$ primeras hebras son rectas y la n -ésima es la única que se entrelaza con las demás.



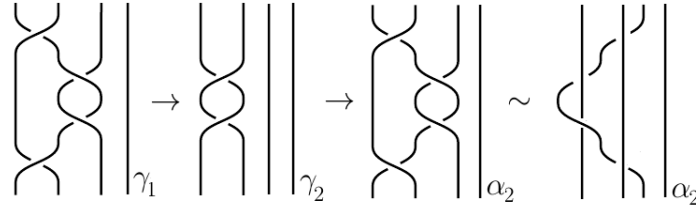
Ahora, escribimos $\beta = \alpha\gamma$ y obtenemos el siguiente diagrama de la trenza de partida en el que la primera parte está “**peinada**”:



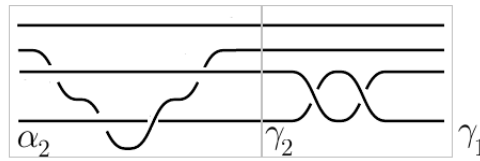
Repetimos el proceso de peinado de las $n - 1$ primeras hebras de γ , que llamaremos γ_1 a partir de ahora. Es decir:

- Reemplazamos la $(n - 1)$ -ésima hebra de γ_1 por una hebra sin trenzar. El resultado de esta operación es otra n -trenza pura γ_2 , con las dos últimas hebras no trenzadas.

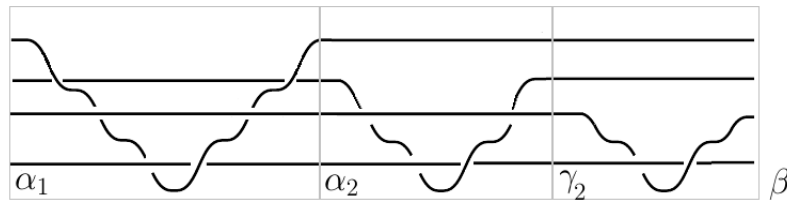
- Construimos la trenza $\alpha_2 = \gamma_1 \gamma_2^{-1}$.



- Reescribimos la trenza γ_1 como el producto $\alpha_1 \gamma_2$.



El algoritmo sigue hasta peinar toda la trenza. En nuestro caso, puesto que γ_2 ya está peinada, el proceso acaba y obtenemos el diagrama peinado de la trenza de partida β .



La forma peinada de una trenza pura siempre existe pues el procedimiento anterior puede aplicarse a cualquier trenza pura. Además, es única ya que los α_i están unívocamente determinados.

Ahora que conocemos el algoritmo de peinado de trenzas puras no parece que hayamos adelantado mucho en en la resolución del problema de la palabra, sin embrago, los resultados que daremos a continuación nos acercan cada vez más a la solución.

5.2. Trenzas peinadas

Definición 5.1 Dado $k \geq 1$, diremos que la trenza pura α es una k -trenza peinada si el borrado de su k -ésima hebra da lugar a la $(k - 1)$ -trenza trivial. Denotaremos por A_k al

conjunto de todas las k -trenzas peinadas.

Las trenzas α_i del algoritmo de peinado anterior son ejemplos de trenzas peinadas, siempre que no tengamos en cuenta las últimas $i - 1$ hebras no trenzadas. Teniendo en cuenta esta consideración, podemos afirmar que $\alpha_i \in A_{n-i+1}$ para cada $i = 1, \dots, n$.

La introducción del conjunto de trenzas peinadas no es casual y juega un papel fundamental en la resolución del problema de la palabra en grupos de trenzas. Veamos algunas de las propiedades de las trenzas peinadas.

Proposición 5.2 *Dada una n -trenza $\beta \in P_n$, podemos expresarla como producto de trenzas peinadas $\beta = \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$. Entonces, β es la n -trenza trivial si, y solo si, cada α_i de su descomposición lo es.*

Demostración.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 1_n$, es evidente que el producto, β , también será trivial.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ahora, supongamos que $\beta \sim 1_n$. Denotemos por β_i la trenza obtenida tras el borrado de las últimas i hebras de β . Del mismo modo, llamaremos $\alpha_{j,i}$ a la trenza resultante de eliminar las i últimas hebras de α_j . Tenemos, por lo tanto, las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 = \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \\ \beta_1 &= \alpha_{1,1} \cdots \alpha_{n-1,1} \\ \beta_2 &= \alpha_{1,2} \cdots \alpha_{n-1,2} \\ &\vdots \\ \beta_{n-2} &= \alpha_{1,n-2} \cdots \alpha_{n-1,n-2} \end{aligned}$$

Puesto que cada β_i es la trenza trivial de $n - i$ hebras. Por la forma de los α_j , podemos afirmar que :

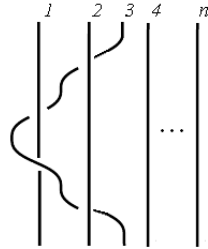
- $\alpha_{1,1}$ es la $(n - 1)$ -trenza trivial.
- $\alpha_{1,2}$ y $\alpha_{2,2}$ son la $(n - 2)$ -trenza trivial.
- En general, $\alpha_{1,i}, \dots, \alpha_{i,i}$ son la $(n - i)$ -trenza trivial, para cada $i = 1, \dots, n - 2$.

En particular, si tomamos $i = n - 2$, tenemos que $\alpha_{1,n-2} = \cdots = \alpha_{n-2,n-2} = 1_2$ y, por lo tanto, $1_2 = \beta_{n-2} = \alpha_{1,n-2} \cdots \alpha_{n-1,n-2} = \alpha_{n-1,n-2}$.

Recordemos que $\alpha_{n-1} \in A_2$ es tal que la supresión de su segunda hebra nos da la n -trenza trivial, es decir, la única hebra que puede provocar cruces es la segunda.

Si $\alpha_{n-1,n-2}$, la trenza que resulta de eliminar las últimas $n-2$ hebras de α_{n-1} , es la 2-trenza trivial; se sigue que α_{n-1} es la n -trenza trivial.

Tomemos ahora, $i = n-3$. Siguiendo el mismo razonamiento, se tiene que $1_3 = \beta_{n-3} = \alpha_{n-2,n-3}\alpha_{n-1,n-3}$ y, puesto que $\alpha_{n-1} = 1_n$, sabemos que $\alpha_{n-1,j} = 1_{n-j}$. En particular, si $j = i = n-3$, $\alpha_{n-1,n-3} = 1_3$. Esto conduce a que $\alpha_{n-2,n-3} = 1_3$. Si recordamos la forma de $\alpha_{n-2} \in A_3$:



y la definición de $\alpha_{n-2,n-3}$, es inmediato que α_{n-2} es la n -trenza trivial.

Procediendo de manera análoga, se concluye que todo α_i ha de ser trivial, como queríamos probar.

■

Proposición 5.3 *Para cada entero $k \leq n$, el subconjunto de k -trenzas peinadas es subgrupo de B_n .*

Demostración. Fijemos un entero $k \leq n$. Es evidente que:

- la n -trenza trivial es k -peinada pues el borrado de su k -ésima hebra nos da la trenza trivial de una hebra menos.
- La inversa de una k -trenza peinada es una k -trenza peinada por la definición de la inversa como la trenza reflejo.

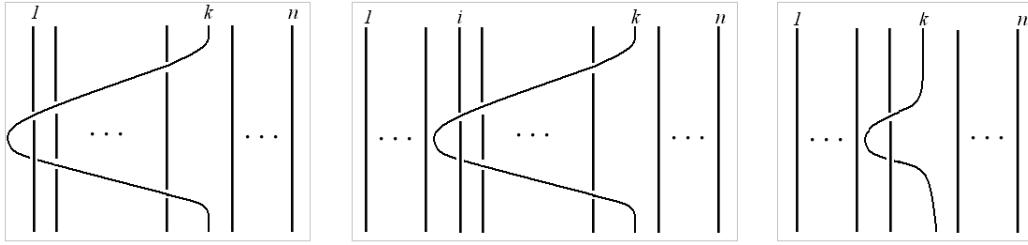
Veamos que el producto de trenzas es cerrado en A_k . Tomemos β_1, β_2 dos n -trenzas en A_k . En otras palabras, β_1, β_2 son puras, sus últimas $n-k$ hebras son no trenzadas y sus primeras $k-1$ hebras solo están entrelazadas con la k -ésima. Tras estas consideraciones, es inmediato que la eliminación de la k -ésima hebra de $\beta_1\beta_2$ nos da la $(n-1)$ -trenza trivial y, por lo tanto, podemos afirmar que $\beta_1\beta_2 \in A_k$.

■

La primera pregunta que nos planteamos, ahora que sabemos que las trenzas peinadas forman grupo, es si podemos dar una presentación que nos ayude a resolver nuestro problema de clasificación de trenzas. La respuesta es afirmativa. A continuación daremos los resultados necesarios para obtener dicha presentación.

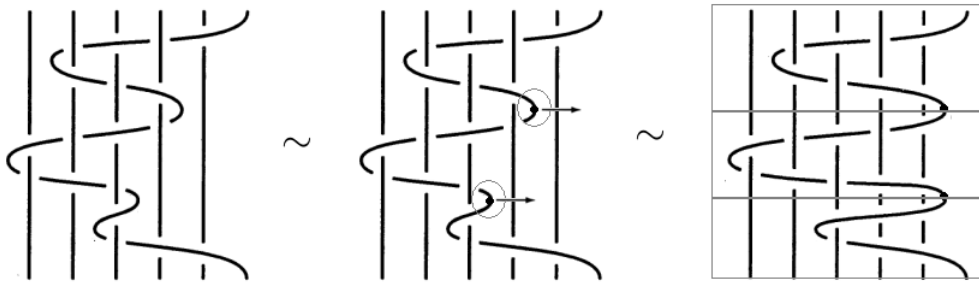
Proposición 5.4 *Para cada $k \leq n$, el subgrupo $A_k \leq B_n$ está generado por:*

$$\begin{aligned} a_1 &= (\sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_2)\sigma_1^2(\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}) \\ a_2 &= (\sigma_{k-1}\sigma_{k-2}\cdots\sigma_3)\sigma_2^2(\sigma_3^{-1}\cdots\sigma_{k-2}^{-1}\sigma_{k-1}^{-1}) \\ &\vdots \\ a_{k-2} &= \sigma_{k-1}\sigma_{k-2}^2\sigma_{k-1}^{-1} \\ a_{k-1} &= \sigma_{k-2}^2 \end{aligned}$$



De izquierda a derecha: a_1, a_i para algún $1 < i < k-1, a_{k-1}$.

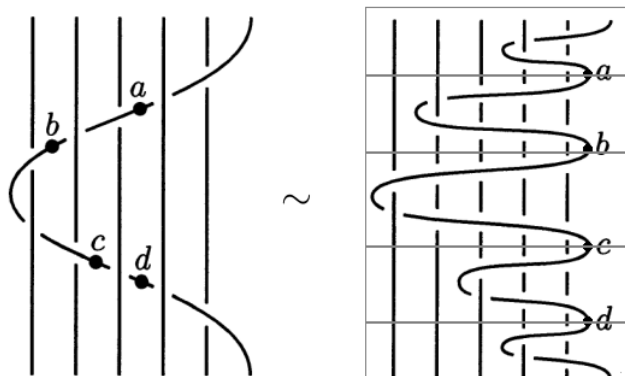
Demostración. Basta ver que cualquier k -trenza peinada puede escribirse en función de los elementos $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$. Tomemos $\beta \in A_k$ y realicemos el siguiente proceso. En primer lugar, marquemos los puntos de la k -ésima hebra de β en los que la recta tangente sea vertical. Seleccionemos aquéllos que quedan a la derecha y tiremos de ellos como se muestra en la figura:



De este modo, hemos transformado una k -trenza peinada en el producto de un número finito de k -trenzas peinadas más sencillas, en las que la k -ésima hebra realiza un único

movimiento de “ida y vuelta”. En otras palabras, la recta tangente es vertical en un único punto de la curva que define la hebra.

Falta ver que cualquier trenza de este tipo puede expresarse como producto de los a_i , con $i = 1, \dots, k - 1$. Tomemos $\gamma \in A_k$ tal que su k -ésima hebra presenta un solo punto en el que la recta tangente sea vertical. Si deformamos la última hebra como se muestra en la figura, obtenemos una trenza equivalente a γ expresada como producto de los a_i



lo que concluye la prueba. ■

Observación 5.5 *En la prueba anterior hemos asumido que β tiene exactamente k hebras, pues las $n - k$ últimas son no trenzadas.*

Según la proposición anterior, $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ genera todo el grupo A_k . Sin embargo podemos, decir mucho más de este grupo. El siguiente resultado determina completamente quién es el grupo de k -trenzas peinadas.

Proposición 5.6 *El grupo A_k está libremente generado por a_1, \dots, a_{k-1} . Esto es, A_k es el grupo libre generado por $k - 1$ elementos.*

Podemos encontrar la prueba completa en [6].

De todo lo anterior, concluimos que el problema de la palabra en el grupo de trenzas se reduce al problema de la palabra en un grupo libre en el que dos palabras son equivalentes si, y solo si, se ha obtenido una a partir de la otra intercalando palabras del tipo xx^{-1} para algún elemento x del grupo. Por lo tanto, queda resuelto este problema y por ello, podemos determinar si dos trenzas dadas son la misma o no.

6. Relación trenzas - nudos

La **teoría de nudos** es la rama de la topología de baja dimensión que estudia las propiedades de los nudos matemáticos con la finalidad de clasificarlos. Este campo de investigación surgió en el siglo XVIII, con estudios de los matemáticos Vandermonde, Gauss y Klein. A finales del siglo XIX, Kelvin y Tait realizaron un exhaustivo análisis con el objetivo de dar una tabla de clasificación de nudos. La finalidad de éstos era entender la estructura atómica, que sospechaban que se comportaba como un nudo de éter. Resultados posteriores demostraron la falsedad de esta teoría, haciendo que se perdiera el interés por la teoría de nudos por parte de los físicos. No obstante, los avances en topología durante el siglo XX propiciaron la vuelta al estudio de los nudos como objeto matemático, despojándolos de cualquier aplicación práctica. Grandes matemáticos como Alexander, Reidemeister, Conway, Kauffman y Jones dedicaron parte de su vida profesional a esta rama, haciendo grandes aportaciones a este, todavía abierto, campo de investigación.

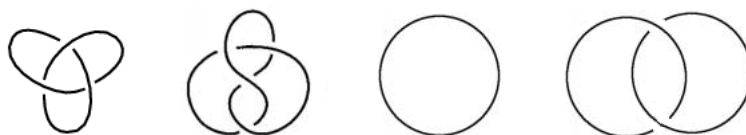
6.1. Nudos: conceptos básicos

Definición 6.1 Llamaremos **nudo** a toda aplicación inyectiva, $k : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que es un homeomorfismo en la imagen. En otras palabras, un nudo es un subespacio topológico de \mathbb{R}^3 homeomorfo a \mathbb{S}^1 , la circunferencia unidad.

Observación 6.2 Debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- De forma habitual, identificaremos un nudo k con su imagen $K = k(\mathbb{S}^1)$.
- Un nudo es poligonal si su imagen es unión disjunta de un número finito de puntos, a los que llamaremos vértices, y un número finito de arcos de segmento abiertos.
- En nuestro estudio, únicamente aceptaremos "nudos dóciles": aquellos que pueden obtenerse por deformación continua de nudos poligonales.

Algunos nudos muy conocidos son:

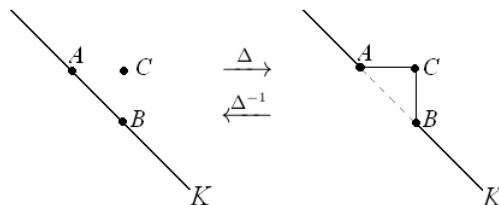


De izquierda a derecha: Nudo de trébol, nudo de ocho, nudo trivial (K_0) y enlace de Hopf.

En teoría de nudos, encontramos el mismo problema de clasificación que en teoría de trenzas. Dados dos nudos, ¿cuándo podemos decir que son el “mismo”? O por el contrario, ¿cómo asegurarnos de que son distintos?

La respuesta es, salvando las distancias, muy parecida a la que dimos en las secciones relativas a trenzas. Las siguientes definiciones ponen de manifiesto la analogía entre los problemas de clasificación de nudos y de trenzas.

Definición 6.3 *Dado un nudo K , consideremos dos puntos A, B en él. Ahora, tomemos un tercer punto $C \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ y realicemos la siguiente operación: reemplacemos el arco AB por $AC \cup CB$. También podemos realizar el proceso opuesto. Llamaremos a ambas sustituciones Δ -movimientos y las denotaremos por Δ y Δ^{-1} , respectivamente.*



El concepto de Δ -movimiento juega en la clasificación de nudos el mismo papel que los movimientos elementales en teoría de trenzas. Por analogía, podemos dar la siguiente definición de equivalencia de nudos:

Definición 6.4 *Dados dos nudos (dóciles) K, K' diremos que son equivalentes si existe una cadena finita de nudos intermedios $K = K_0, K_1, \dots, K_m = K'$ tal que todo par K_i, K_{i+1} difiere en un único Δ -movimiento. Esto es:*

$$K = K_0 \xrightarrow{\Delta^{\pm 1}} K_1 \xrightarrow{\Delta^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{\Delta^{\pm 1}} K_m = K'$$

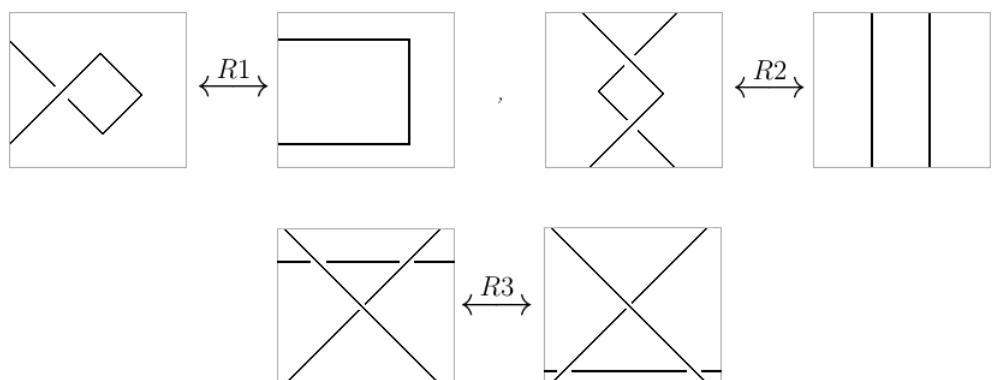
Del mismo modo que hicimos con trenzas, introduciremos la noción de diagrama de un nudo (o enlace) con la finalidad de rebajar la dimensión de nuestros objetos de estudio.

Definición 6.5 *Sea K un nudo poligonal y consideremos una proyección $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobre el plano. Diremos que $p(K)$ es una **proyección regular** si la preimagen de cada punto contiene, a lo sumo, dos puntos. Además, en tal caso, ninguno de los dos puntos puede ser un vértice.*

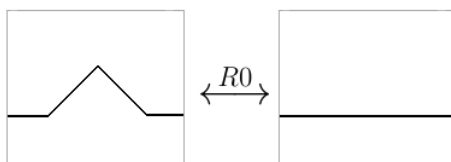
A partir de una proyección regular, podemos construir un **diagrama** de K borrando parte de los arcos que queden por debajo en cada cruce, a los que llamaremos **underpass**. Los arcos que queden por encima en los cruces se llamarán **overpass**.

Trabajar con diagramas, en lugar de con nudos, permite dar un tratamiento simplificado al problema de clasificación de nudos. Daremos la definición de **equivalencia de diagramas** y veremos cómo obtener diagramas equivalentes a partir de uno dado.

Definición 6.6 Llamaremos *movimientos de Reidemeister* a cualquiera de las siguientes transformaciones sobre un diagrama:



Definición 6.7 Llamaremos $R0$ al tensado de los arcos de un diagrama. A pesar de no ser un movimiento de Reidemeister, se comporta como tal por ser una isotopía en el plano.



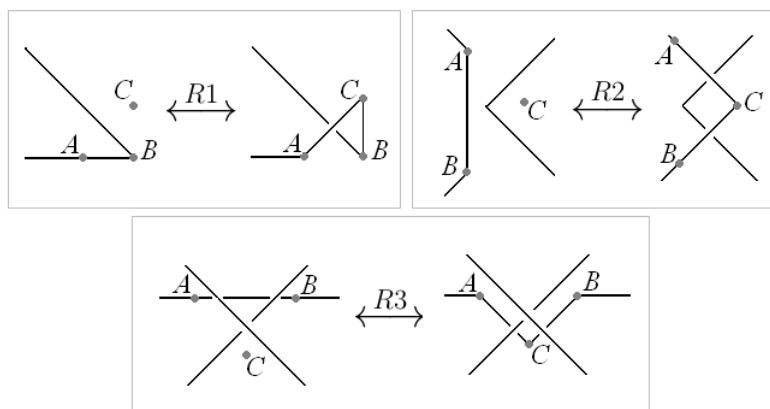
Definición 6.8 Diremos que dos diagramas D, D' son equivalentes si podemos transformar uno en el otro mediante un número finito de movimientos de $R0, R1, R2$ y $R3$.

El siguiente teorema pone de manifiesto la relación entre diagramas de nudos equivalentes.

Teorema 6.9 (Reidemeister, 1932)

Dos nudos son equivalentes si sus diagramas lo son.

La prueba se basa en que los movimientos de Reidemeister son proyecciones de Δ -movimientos.



6.2. Invariantes de nudos

La definición de equivalencia de nudos es, en muchas ocasiones, difícil de aplicar. Dados dos nudos, en general, no es sencillo encontrar la secuencia de Δ -movimientos para pasar de uno al otro. Aun tratando con diagramas, el problema sigue sin ser de fácil solución. Por ello, en la práctica, utilizamos invariantes de nudos que permiten responder negativamente la pregunta “¿dos diagramas aparentemente diferentes representan el mismo nudo?”. A continuación, daremos una lista de invariantes de nudos de distintas naturalezas:

- **Numéricos:** son números asociados a nudos que nos dan información que se conserva por Δ -movimientos.
 - *Crossing number:* mínimo número de cruces, $c(K)$.
 - *Bridge number:* mínimo número de puentes, $b(K)$.
 - *Stick number:* mínimo número de segmentos con el que podemos formar un nudo poligonal equivalente, $s(K)$.
- **Geométricos:** Algunos invariantes son:
 - tricoloreabilidad: posibilidad de pintar los arcos de un nudo con tres colores siguiendo ciertas normas.
 - Quiralidad: diremos que un nudo es aquiral si es equivalente a su imagen espejular (y quiral en otro caso).
- **Algebraicos:** el grupo de un nudo K , $G(K)$, se define como el grupo fundamental de su complementario: $\Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$.

■ **Polinómicos:** existen diferentes formas de asociar un polinomio a un nudo. Algunos invariantes polinómicos son:

- Polinomio *bracket*: $\langle K \rangle$. Este polinomio no se conserva por movimientos del tipo $R1$, por lo tanto no es un invariante de nudos.
- Polinomio de Kauffman $f(K)$. Se construye a partir del polinomio bracket y sí es un invariante de nudos.
- Polinomio de Alexander: $\Delta_K(t)$.
- Polinomio de Jones: $V_K(t)$.

En la siguiente tabla podemos ver estos invariantes sobre tres nudos y un enlace:

Invariante	K_0	Trébol	Figura de ocho	Enlace de Hopf
Crossing number	0	3	4	2
Bridge number	1	2	2	2
Stick number	3	6	7	6
Tricoloreabilidad	No	Sí	No	No aplicable
Quiralidad	No	Sí	No	No
Grupo del nudo	\mathbb{Z}	B_3	$\langle x, y \mid yxy^{-1}xy = xyx^{-1}yx \rangle$	\mathbb{Z}^2
Bracket	1	$A^7 - A^3 - A^{-5}$	$A^8 - A^4 - A^{-4} + A^{-8} + 1$	$-A^4 - A^{-4}$
Kauffman	1	$-A^{16} + A^{12} + A^4$	$A^8 - A^4 - A^{-4} + A^{-8} + 1$	$-A^{-2} - A^{-10}$
Alexander	1	$t - 1 + t^{-1}$	$-t + 3 - t^{-1}$	$t - 1$
Jones	1	$t^{-1} + t^{-3} + t^{-4}$	$t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2}$	$-t^{-1/2} - t^{5/2}$

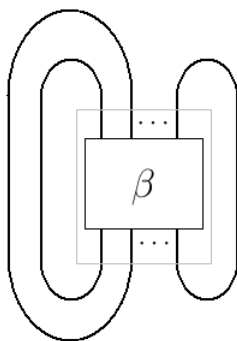
Estos invariantes permiten distinguir entre nudos no equivalentes, no obstante, no podemos afirmar que dos nudos dados son equivalentes basándonos en la información de un invariante. Por ejemplo, en la tabla anterior podemos ver que $b(\text{Trébol}) = b(\text{Ocho}) = b(\text{Enlace de Hopf}) = 2$, sin embargo, son nudos no equivalentes pues sus respectivos *crossing numbers* son distintos.

6.3. Cerraduras de trenzas

Tras hacer un breve estudio sobre nudos, podemos darnos cuenta de lo próximas que están la teoría de trenzas y la de nudos. Llegados a este punto, nos preguntamos si la relación entre ambas ramas puede ser más estrecha y si podemos pasar de una otra de

forma natural. La respuesta es afirmativa. En esta sección veremos cómo construir nudos a partir de trenzas y la relación de nudos generados por trenzas equivalentes.

Consideremos una n -trenza $\beta \in B_n$ y, para cada $i = 1, \dots, n$, unamos el punto p_i con el p'_i de forma que los arcos no generen ningún cruce. Ésta es la forma natural de formar nudos (o enlaces) a partir de trenzas.



Definición 6.10 Dada un n -trenza, β , llamaremos **trenza cerrada** (o *clausura de β*) al nudo (o enlace) generado a partir de β según el procedimiento anterior. Denotaremos a tal nudo (o enlace) como K_β .

El proceso que acabamos de definir nos permite pasar de trenzas a nudos. La pregunta natural en este momento es si podemos deshacer el camino y obtener una trenza a partir de un nudo. La respuesta la dio el matemático James Waddell Alexander en 1923, cuando probó que todo nudo (o enlace) proviene de cerrar una trenza. La prueba que daremos está basada en la original y se basa en un algoritmo para hallar una trenza, cuya cerradura sea un nudo dado.

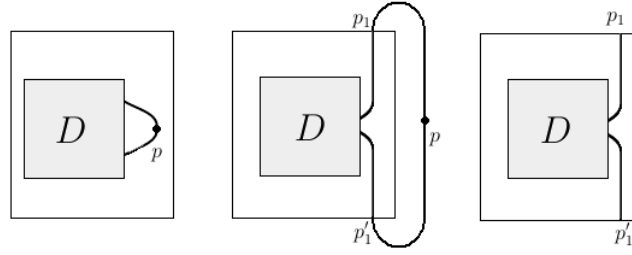
Teorema 6.11 (Alexander, 1923)

Dado un nudo (o enlace) K , podemos encontrar un entero positivo n y una trenza $\beta \in B_n$ tal que la trenza cerrada K_β sea precisamente K .

Demostración. Sea K un nudo y D un diagrama de K . Consideremos un rectángulo que encierre el diagrama y procedamos como sigue:

- Tomemos un punto p en D que no sea un cruce y cortemos el diagrama por él. Obtenemos dos extremos.
- Llevaremos cada extremo a una de las bases del rectángulo sin generar nuevos cruces. Llamaremos p_1 y p'_1 a los puntos de intersección con las bases superior e inferior, respectivamente. Notemos que la unión de estos dos puntos mediante un arco exterior al rectángulo nos da un diagrama equivalente a D .

Tras este proceso, obtenemos un objeto de la forma



Puesto que la curva que define el diagrama va de p_1 a p'_1 , es decir, de arriba a abajo, presentará tantos mínimos locales como máximos. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal número. Puede ocurrir:

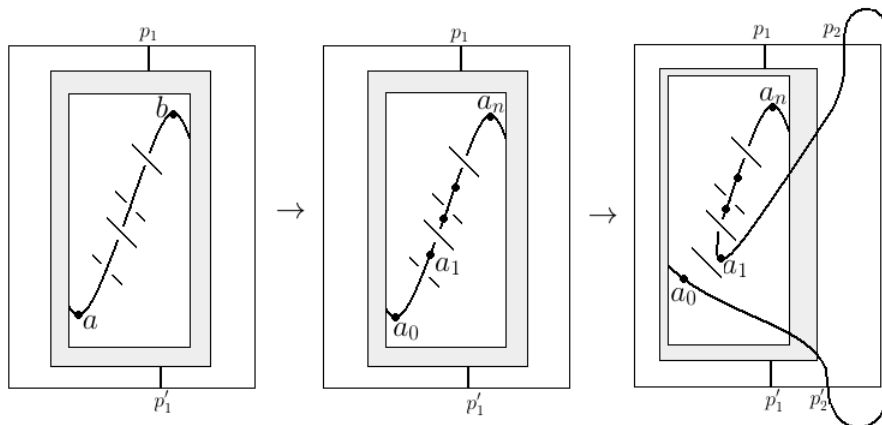
Caso 1: $m = 0$. Nos encontramos ante un diagrama de la trenza trivial de una hebra y $K = K_0$.

Caso 2: $m > 0$.

Tomemos dos puntos a, b en la curva que sean un mínimo y un máximo, respectivamente, de forma que el arco ab no contenga ningún otro máximo o mínimo. Notemos que ab puede cruzarse con otros arcos en el diagrama.

Sea n el número de cruces en los que interviene ab . Elegimos $n + 1$ puntos del arco ab : $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$, de modo que $a_i a_{i+1}$ solo se cruce una vez con otro arco, para cada índice $i = 0, \dots, n - 1$.

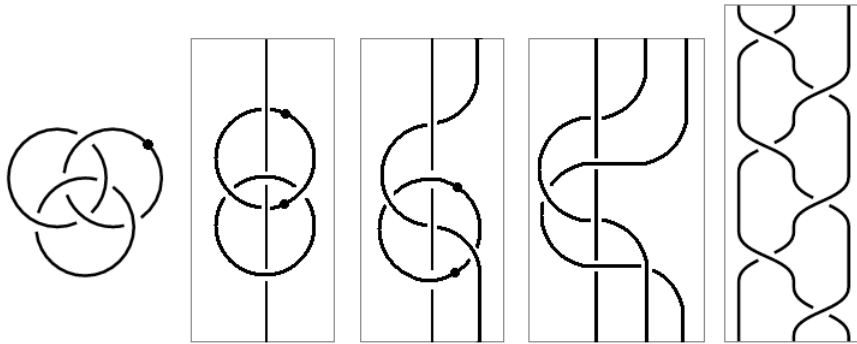
Fijemos puntos p_2, p'_2 a la derecha de p_1, p'_1 , respectivamente y reemplacemos $a_0 a_1$ por $a_0 p'_2 p_2 a_1$ donde el arco $p'_2 p_2$ une los puntos p'_2 y p_2 por fuera del rectángulo como se muestra en la figura siguiente:



De este modo, hemos eliminado el mínimo local $a_0 = a$. Ahora, a_1 es un mínimo del diagrama equivalente obtenido. Repitiendo este proceso n veces más, obtenemos un diagrama equivalente a D en el que a no es un mínimo y b no es un máximo. Esto es, hemos rebajado en una unidad el número de máximos y mínimos que presentaba el diagrama original. Si aplicamos este algoritmo a los $m - 1$ pares de máximos y mínimos locales de la nueva curva, obtenemos una trenza en el rectángulo, cuya cerradura es, por construcción, el nudo de partida.

■

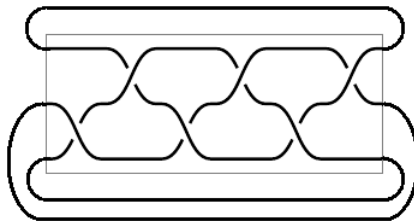
Ejemplo 6.12 Aplicaremos el algoritmo detallado en la prueba del Teorema de Alexander a los anillos Borromeos:



Obtenemos la 3-trenza $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$, cuya cerradura es el diagrama de los anillos Borromeos.

Definición 6.13 Sea D un diagrama de un nudo (o enlace) K . Diremos que D es un **diagrama trenzado** de K si podemos dar una curva cerrada y simple L que encierre una trenza y deje fuera un conjunto finito de arcos que no se cruzan. En tal caso, diremos también que L es una **curva separadora** para el diagrama D .

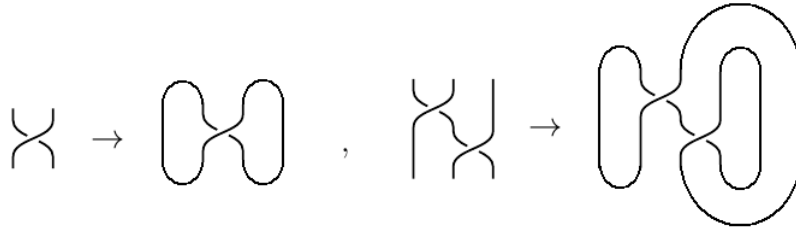
Ejemplo 6.14 La siguiente figura es un diagrama trenzado de los anillos Borromeos y el rectángulo es una curva separadora.



La noción de curva separadora intervendrá en la prueba del *Teorema de Markov*, que daremos en la siguiente sección.

6.4. Equivalencia de Markov

Según hemos definido las trenzas cerradas, dos trenzas equivalentes darán clausuras equivalentes (como nudos). Sin embargo, trenzas no equivalentes pueden dar también nudos equivalentes, como podemos ver en la figura siguiente:



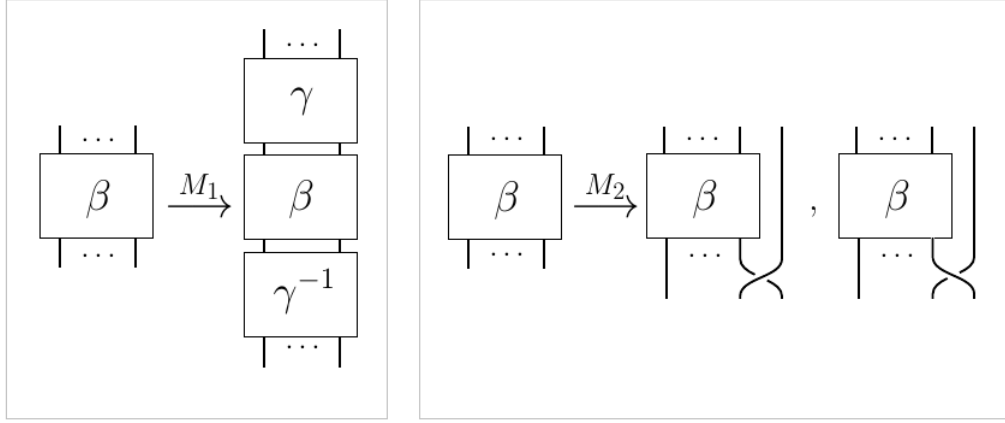
Dos trenzas no equivalentes que generan el nudo trivial.

Esta situación hace que los nudos y trenzas no estén relacionados de forma biyectiva. Debemos establecer, por lo tanto, una nueva relación de equivalencia sobre el conjunto de trenzas más fina, en el sentido de que nudos equivalentes provengan de la misma clase de equivalencia de trenzas bajo esta nueva relación.

Definición 6.15 Consideremos el conjunto $B_\infty = \bigcup_{n \leq 1} B_n$ de trenzas de cualquier número de hebras. Dada $\beta \in B_n$, definimos las siguientes operaciones sobre B_∞ :

1. *Conjugación* (M_1): transforma β en $\gamma\beta\gamma^{-1}$, para algún $\gamma \in B_n$.
2. *Estabilización* (M_2): sustituye la n -trenza β por $\beta\sigma^{\pm 1} \in B_{n+1}$.

Llamaremos **movimientos de Markov** a las operaciones $M_1^{\pm 1}$ y $M_2^{\pm 1}$.



Observación 6.16 En la definición de estabilización partimos de una trenza de n hebras, β , y la operamos con una $(n+1)$ -trenza. Esto no es correcto y cuando efectuamos el producto $\beta\sigma^{\pm 1}$ en B_{n+1} , la trenza que denotamos por β es la resultante de añadir una hebra sin trenzar a la trenza dada.

Igual que hicimos con movimientos elementales, podemos definir una relación de equivalencia a partir de los movimientos de Markov, en este caso, sobre el conjunto B_{∞} .

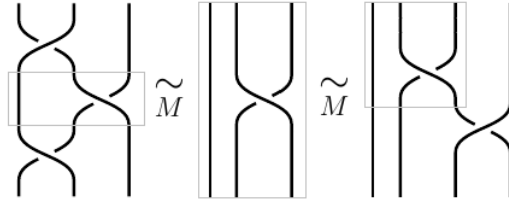
Definición 6.17 Dadas dos trenzas $\beta, \beta' \in B_{\infty}$, diremos que son Markov-equivalentes (o M -equivalentes), y lo denotaremos $\beta \sim_M \beta'$, si podemos construir una cadena finita de trenzas intermedias

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{M_i^{\pm 1}} \beta_1 \xrightarrow{M_i^{\pm 1}} \dots \xrightarrow{M_i^{\pm 1}} \beta_r = \beta'$$

donde cada par β_i, β_{i+1} difiere en un único movimiento de Markov, para $i = 0, \dots, r-1$.

A partir de esta definición, es inmediato probar que la equivalencia de Markov es, en efecto, una relación de equivalencia sobre B_{∞} .

Ejemplo 6.18 Bajo la relación de M -equivalencia, las trenzas siguientes representan a misma clase:



De izquierda a derecha: $\beta_1 = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$, $\beta_2 = \sigma_2^{-1}$ y $\beta_3 = \sigma_2^{-1}\sigma_3$.

Observación 6.19 Equivalencia de trenzas implica equivalencia de Markov. El recíproco

no es cierto.

Dadas dos n -trenzas $\beta \sim \beta'$, podemos pensar en β' como la trenza conjugada de β por la n -trenza trivial. Por lo tanto, $\beta \underset{M}{\sim} \beta'$.

Para probar que la equivalencia de Markov no implica equivalencia de trenzas, basta considerar las trenzas del ejemplo anterior. En efecto, las tres son M -equivalentes pero β_3 tiene 4 hebras, mientras que β_1 y β_2 tienen 3. Por otra parte, $\pi(\beta_1) = (1\ 3) \neq (2\ 3) = \pi(\beta_2)$. Por lo que no son equivalentes.

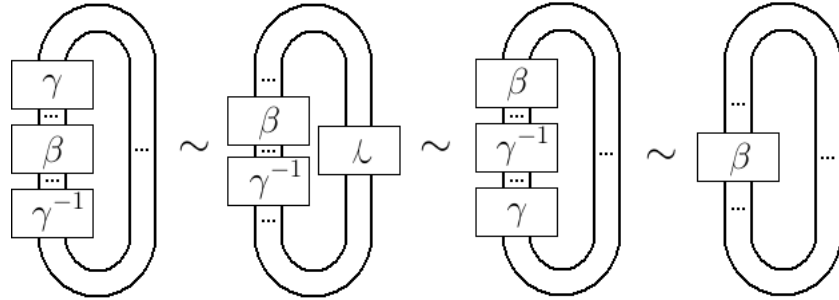
La equivalencia de Markov juega un papel crucial en la relación trenzas - nudos, como veremos en el siguiente resultado.

Teorema 6.20 (Markov, 1936) *Los nudos $K_\beta, K_{\beta'}$ son equivalentes si, y solo si, las trenzas β, β' son M -equivalentes.*

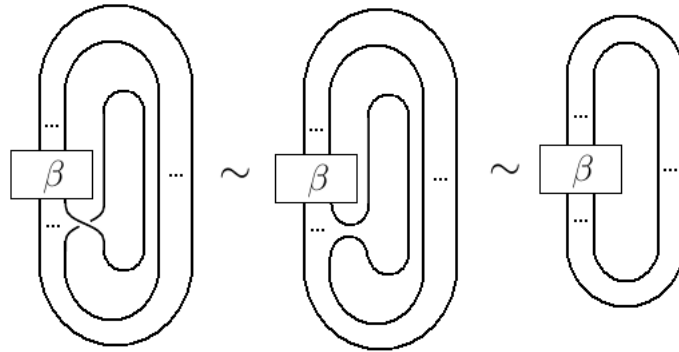
Demostración.

⊞ Veamos que trenzas M -equivalentes dan el mismo nudo. Para ello, consideremos dos n -trenzas arbitrarias β, γ .

Las cerraduras de las trenzas $\gamma\beta\gamma^{-1}$ y β son equivalentes como nudos.



La $(n+1)$ -trenza $\beta\sigma_n^{\pm 1}$ genera el mismo nudo que β .



\Rightarrow Daremos las ideas básicas de la prueba de esta implicación. La demostración completa puede encontrarse en [2] y [6].

Dados K, K' dos nudos equivalentes, en virtud del *Teorema de Alexander* podemos encontrar trenzas β, β' cuyas cerraduras son K, K' , respectivamente. Consideremos también diagramas D, D' de los nudos en cuestión. De la equivalencia $K \sim K'$ (como nudos) se sigue que D y D' son equivalentes (como diagramas). Esto es, existen diagramas intermedios D_0, D_1, \dots, D_m satisfaciendo

$$D = D_0 \xrightarrow{R_i} D_1 \xrightarrow{R_i} \dots \xrightarrow{R_i} D_m = D'$$

donde cada par (D_j, D_{j+1}) difiere en un único movimiento de Reidemeister R_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, para cada $j = 0, \dots, m-1$.

Tengamos en cuenta las siguientes consideraciones:

Resultado 1: Dado un diagrama D de un nudo K , siempre podemos encontrar una curva separadora para D .

Resultado 2: Si L y \bar{L} son curvas separadoras para el mismo diagrama D , entonces las trenzas (D, L) y (D, \bar{L}) son M -equivalentes.

Resultado 3: Si D' es un diagrama obtenido a partir de D mediante un único movimiento de Reidemeister y L, L' son curvas separadoras para D y D' , respectivamente. Entonces, las trenzas (D, L) y (D', L') son M -equivalentes.

Es fácil probar el primer resultado. Si seguimos el algoritmo dado en la prueba del *Teorema de Alexander*, obtenemos explícitamente un diagrama trenzado del nudo K . Basta considerar una curva cerrada y simple que encierre la parte trenzada de tal diagrama. Sin embargo, ésta no es la única curva separadora que podemos encontrar. El segundo resultado pone de manifiesto que la elección de la curva separadora es indiferente. Por lo tanto, para cada $j = 0, \dots, m$, podemos encontrar una curva separadora L_j para el diagrama D_j .

En virtud del tercer resultado, podemos afirmar que las trenzas (D_j, L_j) y (D_{j+1}, L_{j+1}) son Markov-equivalentes para cada valor de $j = 0, \dots, m-1$. La transitividad de la relación de M -equivalencia concluye la prueba.

■

7. El polinomio de Jones

En esta sección introduciremos el polinomio de Jones, un invariante polinómico de nudos que el matemático neozelandés Vaughan Frederick Randal Jones presentó en el año 1984.

Además de por su gran poder a la hora de clasificar nudos -es el primer invariante que permitió distinguir entre el trébol y su imagen especular- prestaremos gran atención a este invariante por su construcción a partir de grupos de trenzas. Jones, que en aquel momento se dedicaba a la mecánica estadística, apreció cierta relación entre los grupos de trenzas y las álgebras de Temperley-Lieb y buscó la forma de conectarlos. De este modo, construyó polinomios asociados a trenzas que se mantenían invariantes por movimientos de Markov. Su aportación a la teoría de nudos le valió la **Medalla Fields** en el año 1990.

A continuación daremos las nociones básicas sobre álgebras de Temperley-Lieb, que nos permitirán seguir los razonamientos de Jones hasta la construcción del polinomio que lleva su nombre.

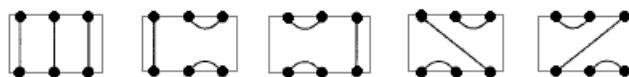
7.1. Diagramas de Temperley-Lieb

Consideremos un rectángulo y fijemos $2n$ puntos, n en la base superior y otros n en la inferior. Llamaremos **diagrama de Temperley-Lieb** a cualquier grafo que conecte cada punto con exactamente otro sin crear cruces ni salir del rectángulo. Denotaremos por TL_n al conjunto de diagramas de Temperley-Lieb de $2n$ nodos.

Observación 7.1 *Fijado $n \in \mathbb{N}$, hay un número finito de diagramas de Temperley-Lieb de $2n$ nodos. De forma recursiva podemos obtener que*

$$|TL_n| = C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!},$$

el n -ésimo número de Catalan.

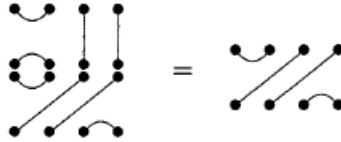


Los 5 diagramas de Temperley-Lieb de 6 nodos.

Podemos definir un producto sobre los elementos de TL_n . Dados A, A' , dos diagramas de Temperley-Lieb, la forma natural de operarlos es yuxtaponerlos, es decir, colocar uno

a continuación de otro, haciendo coincidir los nodos inferiores de A con los superiores de A' .

Observación 7.2 *Al operar determinados diagramas, pueden formarse bucles que son eliminados del diagrama producto, como se muestra en la figura siguiente:*



Propiedades del producto de diagramas de Temperley-Lieb:

- De la propia definición del producto de diagramas de Temperley-Lieb se sigue que esta operación es asociativa.
- Además, para cada valor de n podemos encontrar un diagrama, que llamaremos diagrama identidad y denotaremos I_n , que juega el papel de elemento neutro para el producto de diagramas sobre TL_n . Definimos el diagrama identidad como el diagrama de Temperley-Lieb que conecta cada punto de la base superior con su respectivo punto de la base inferior.
- En general, este producto no es conmutativo.
- Ningún diagrama, excepto el diagrama identidad, posee inverso para el producto de diagramas de Temperley-Lieb. (*)

Para probar esta última propiedad, debemos dar previamente el siguiente definición:

Definición 7.3 *Dado A un diagrama de Temperley-Lieb, llamaremos rango de A , y lo denotaremos $\mathbf{rg}(A)$, al número de arcos que conectan nodos de filas distintas. En otras palabras, el rango de un diagrama mide el número de arcos que van de arriba a abajo.*

Es evidente que I_n es el único diagrama de $2n$ nodos con rango n . Además, según la definición de rango, podemos afirmar que el rango del producto de dos diagramas no excede el rango de ninguno de sus factores. Esto es, $\mathbf{rg}(AA') \leq \min\{\mathbf{rg}(A), \mathbf{rg}(A')\}$, $\forall A, A' \in TL_n$.

Consideremos un diagrama A y supongamos que existe su inverso $A^{-1} \in TL_n$. Debe satisfacerse $AA^{-1} = I_n$ y, por lo tanto, $n = \mathbf{rg}(I_n) \leq \mathbf{rg}(A)$. Se sigue que $\mathbf{rg}(A) = n$ y $A = I_n$. Por lo que (*) queda probado y TL_n es un monoide no conmutativo.

Generadores del monoide TL_n

Dado n , consideremos los siguientes $n - 1$ diagramas en TL_n :

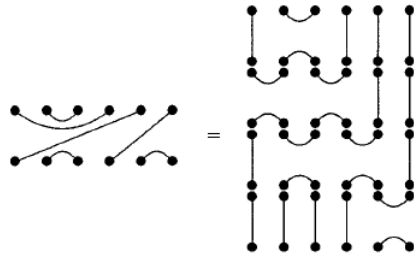


De izquierda a derecha los diagramas e_1, e_2 y e_{n-1} .

Para cada $i = 1, \dots, n - 1$, e_i es el diagrama de Temperley-Lieb que conecta los nodos $i, i + 1$ de la base superior e $i, i + 1$ de la base inferior. El resto de nodos están conectados mediante arcos verticales.

Proposición 7.4 Para cada $n \geq 2$, el monoide TL_n está generado por los diagramas e_1, \dots, e_{n-1} .

Ejemplo 7.5 La siguiente figura muestra la expresión de un diagrama de TL_4 en función de los generadores.

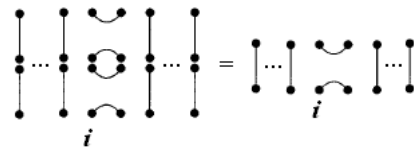


Así, el diagrama dado tiene la palabra $e_2e_1e_3e_2e_4e_5$.

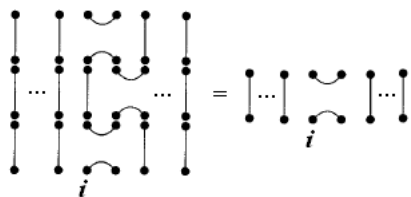
Relaciones de los generadores

Los generadores del monoide TL_n verifican las siguientes relaciones:

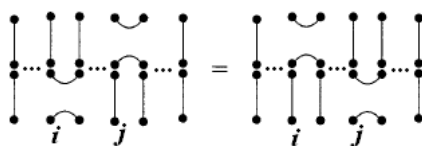
- $e_i e_i = e_i$, salvo por un bucle perdido.



- $e_i e_{i+1} e_i = e_i$



- $e_i e_j = e_j e_i$ siempre que $|i - j| \geq 2$.



7.2. El álgebra de Temperley-Lieb

Para cada n natural y cada $x \in \mathbb{C}$, definimos el álgebra de Temperley-Lieb como el \mathbb{C} -espacio vectorial cuya base viene dada por los diagramas de TL_n . Lo denotamos por $TL_n(x)$.

$$TL_n(x) = \left\{ \sum_{A \in TL_n} \alpha_A A \mid \alpha_A \in \mathbb{C} \right\}$$

En el caso particular $n = 2$, el álgebra $TL_2(x)$ es el \mathbb{C} -espacio vectorial con base $\{I_2, e_1\}$. Los elementos de $TL_2(x)$ son de la forma $aI_2 + be_1$ y la suma se realiza componente a componente. También podemos definir un producto sobre los vectores de $TL_2(x)$. Dados dos vectores $aI_2 + be_1$ y $cI_2 + de_1$, su producto tiene la expresión

$$ac(I_2 I_2) + ad(I_2 e_1) + bc(e_1 I_2) + bd(e_1 e_1)$$

podemos simplificar esta fórmula efectuando los productos de diagramas. Así, $I_2 I_2 = I_2$, $I_2 e_1 = e_1 I_2 = e_1$. Sin embargo, el producto $e_1 e_1$ no coincide con e_1 como definimos en secciones previas. En el caso del álgebra de Temperley-Lieb, los bucles generados al realizar determinados productos deben ser contabilizados. Aquí entra en juego el parámetro prefijado x : multiplicaremos por x^k cada vez que aparezcan k bucles al efectuar productos de vectores en $TL_2(x)$. De este modo, obtenemos que $(aI_2 + be_1)(cI_2 + de_1) = acI_2 + (ad + bc + bdx)e_1$, que sigue siendo un elemento de $TL_2(x)$.

Estas operaciones pueden generalizarse para cualquier $n > 2$ y podemos obtener las relaciones

- $e_i e_i = x e_i$
- $e_i e_{i+1} e_i = e_i$
- $e_i e_j = e_j e_i$ siempre que $|i - j| \geq 2$.

7.3. La traza de Markov

Igual que hicimos con trenzas, podemos cerrar los diagramas de Temperley-Lieb conectando los n puntos superiores con sus respectivos, mediante arcos exteriores al rectángulo que no se cruzan. De esta forma, generamos “enlaces desenlazados”. Llamaremos **bucles de cerrado** de un diagrama A al número de componentes de estos enlaces y lo denotaremos por b_A .

Ejemplo 7.6

- El diagrama identidad I_n es el único con n bucles de cerrado.
- Los diagramas generadores e_i de $2n$ nodos tienen $n - 1$ bucles de cerrado.

Si traducimos estas condiciones al lenguaje del álgebra de Temperley-Lieb, a la cerradura de un diagrama A le corresponde el factor x^{b_A} , que llamaremos **factor de cerrado**. Podemos definir una aplicación lineal $\text{tr} : TL_\infty(x) \rightarrow \mathbb{C}$ que envíe cada diagrama a su factor de cerrado, donde $TL_\infty(x) = \cup_{n \geq 1} TL_n(x)$. Esta aplicación se llama **traza de Markov**.

Puesto que $e_i e_j = e_j e_i$ para $|i - j| \geq 2$ y el factor de cerrado de $e_i e_{i+1}$ coincide con el de $e_{i+1} e_i$, la traza de Markov es conmutativa. Además, se verifica la relación

$$\text{tr}(u e_n) = x \text{tr}(u), \quad \forall u \in TL_n,$$

conocida como **propiedad de Markov**.

Existen multitud de aplicaciones satisfaciendo las condiciones expuestas. Sin embargo, el siguiente resultado pone de manifiesto la unicidad de la traza de Markov:

Teorema 7.7 (Ocneanu)

Dados $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{C}$, existe una única aplicación lineal $\text{tr} : TL_\infty(x) \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaciendo:

$$(i) \quad \text{tr}(I_n) = 1.$$

$$(ii) \quad \text{tr}(uv) = \text{tr}(vu), \quad \forall u, v \in TL_n(x)$$

$$(iii) \quad \text{tr}(ue_n) = x \text{tr}(u), \quad \forall u \in TL_n(x)$$

Redefiniremos la traza de Markov para que se satisfaga (i). Solo tenemos que dividir entre x^n . De esta forma,

$$\text{tr}(A) = \frac{x^{b_A}}{x^n} = x^{b_A-n}, \quad \forall A \in TL_n.$$

En particular, $\text{tr}(I_n) = 1$. Así, después de normalizarla, la traza de Markov es única. Esta aplicación es importante a la hora de definir el polinomio de Jones.

El siguiente teorema, enunciado por Jones, conecta las álgebras de Temperley-Lieb con los grupos de trenzas.

Teorema 7.8 (*Jones*)

Sean $n > 1$ y $x, t \in \mathbb{C}$ y consideremos la aplicación $\rho_n : B_n \longrightarrow TL_n(x)$ dada por

$$\rho_n(\sigma_i) = (t+1)e_i - I_n.$$

Entonces ρ_n es un homomorfismo si, y solo si, $x^{-1} = 2 + t + t^{-1}$.

Para probar este resultado, basta imponer que la imagen de las relaciones del grupo de trenzas por la aplicación ρ_n sea el diagrama identidad I_n y expresar x en función de t .

7.4. La construcción del polinomio

Jones apreció que dada $\beta \in B_n$, su imagen por $\text{tr} \circ \rho_n$ se mantenía invariante por conjugación, es decir, por movimientos del tipo M_1 . En otras palabras, $\text{tr}(\rho_n(\gamma^{-1}\beta\gamma)) = \text{tr}(\rho_n(\beta))$, $\forall \gamma \in B_n$. Es fácil probarlo teniendo en cuenta que ρ_n es homomorfismo y la conmutatividad de la traza de Markov.

Sin embargo, no ocurre lo mismo cuando aplicamos movimientos M_2 . Por ello, Jones definió su polinomio según la expresión:

$$V_\beta(t) = \left(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n(\beta)-1} \sqrt{t}^{-\exp(\beta)} \text{tr}(\rho_n(\beta)),$$

donde $n(\beta), \exp(\beta)$ denotan el número de hebras y el exponente de la trenza β .

Notemos que el polinomio así definido es invariante por conjugación, ya que $n(\gamma^{-1}\beta\gamma) = n(\beta)$ y $\exp(\gamma^{-1}\beta\gamma) = \exp(\beta)$. Veamos que también se mantiene por movimientos M_2 . Para ello, tendremos en cuenta que $n(\beta\sigma_n^{\pm 1}) = n(\beta) + 1$ y que $\exp(\beta\sigma_n^{\pm 1}) = \exp(\beta) \pm 1$.

$$\begin{aligned}
V_{\beta\sigma_n^{\pm 1}}(t) &= (-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})^{n(\beta)+1-1} \sqrt{t}^{-(\exp(\beta)+1)} \text{tr}(\rho_{n+1}(\beta\sigma_n)) \\
&= (-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})^{n(\beta)-1} (-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) \sqrt{t}^{-\exp(\beta)} \sqrt{t}^{-1} \text{tr}(\rho_{n+1}(\beta\sigma_n))
\end{aligned}$$

Si probamos que $(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) \sqrt{t}^{-1} \text{tr}(\rho_{n+1}(\beta\sigma_n)) = \text{tr}(\rho_n(\beta))$, habremos terminado. En primer lugar,

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\rho_{n+1}(\beta\sigma_n)) &= \text{tr}(\rho_n(\beta)\rho_{n+1}(\sigma_n)) \\
&= \text{tr}(\rho_n(\beta)((t+1)e_n - I_n)) \\
&= (t+1)\text{tr}(\rho_n(\beta)e_n) - \text{tr}(\rho_n(\beta)) \\
&= ((t+1)x - 1)\text{tr}(\rho_n(\beta))
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $x = (2 + t + t^{-1})^{-1}$, es fácil probar que

$$(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) \sqrt{t}^{-1} ((t+1)x - 1) = 1$$

y, por lo tanto, el polinomio de Jones se mantiene invariante por movimientos de Markov.

Corolario 7.9 *El polinomio de Jones es un invariante de nudos.*

Observación 7.10 *Jones utilizó las propiedades abstractas del álgebra de Temperley-Lieb. La utilización de los diagramas de Temperley-Lieb fue introducida por Kauffman, que también dio un invariante polinómico de nudos. En este trabajo hemos preferido utilizar la notación diagramática por ser más visual pero es equivalente a la utilizada por Jones.*

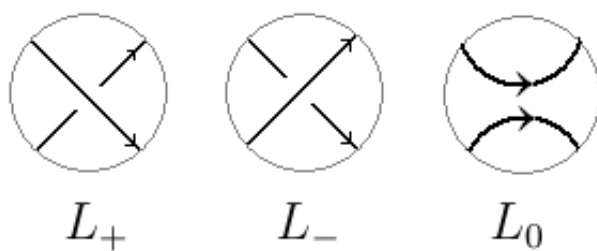
7.5. Cálculo del polinomio de Jones. Ejemplo.

Para el cálculo del polinomio de Jones de un nudo según la definición de la sección anterior, necesitamos conocer una trenza que lo genere. Esto no siempre es fácil. Por ello, en la práctica, suele calcularse del modo que detallaremos a continuación.

Jones advirtió que su polinomio podía calcularse de forma recursiva a partir de los siguientes axiomas:

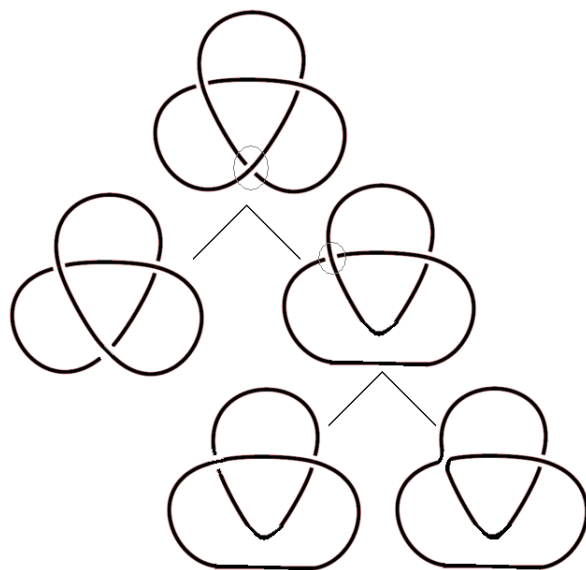
- $V_{K_0}(t) = 1$
- $t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t)$

donde K_0 es el nudo trivial y L_+ , L_- y L_0 corresponden a los diagramas de un enlace L en el que se ha cambiado la naturaleza de uno sus cruces del siguiente modo:



Notemos que la primera condición es consecuencia directa de la definición del polinomio de Jones, teniendo en cuenta que el nudo trivial puede ser generado mediante la cerradura de la trenza trivial de una hebra. La segunda condición no es tan evidente pero también se obtiene a partir de la definición del polinomio y el hecho de que los diagramas L_+ , L_- y L_0 corresponden a los generadores σ_i^{-1} , σ_i y e_i .

A partir de estas condiciones calcularemos el polinomio de Jones del trébol (a la izquierda). En primer lugar, consideramos un cruce. En este caso, se trata de un cruce tipo L_+ . Calculamos los diagramas resultantes al cambiar la naturaleza de este cruce. Repetimos este proceso hasta obtener diagramas triviales.



De este modo, obtenemos que el polinomio de Jones del trébol es

$$V_{\text{Trébol}}(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}.$$

De manera análoga, si consideramos el trébol a la derecha (o imagen especular del trébol), podemos calcular su polinomio de Jones, que resulta ser

$$V_{\text{Trébol}^*}(t) = -t^4 + t^3 + t,$$

por lo que concluimos que el trébol a la izquierda y el trébol a la derecha son nudos no equivalentes. Esto pone de manifiesto la potencia del polinomio de Jones como herramienta clasificadora de nudos.

A pesar de poder calcularse a partir de diagramas de nudos, no olvidemos la construcción original del polinomio de Jones, a partir de grupos de trenzas. Con este invariante, concluimos nuestro estudio cuyo objetivo no era más que mostrar la estrecha relación entre la teoría de trenzas y la teoría de nudos.



Referencias

- [1] Artin, E. *Theory of braids*, Ann. of Math (2) **48** (1947) 101-126.
- [2] Birman, J.S. and Brendle, T.E. *Braids: A survey*. Handbook of Knot Theory. Elsevier, Amsterdam, 2005.
- [3] Dehornoy, P. *A fast method of comparing braids*, Adv. in Math. **125** (1997), 200-235.
- [4] Gilbert, N.D. and Porter, T. (1994) *Knots and Surfaces*. Oxford Science Publications. Oxford University Press, United Kingdom.
- [5] Jones, V.F.R. *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), 103-111.
- [6] Murasugi, K. and Kurpita, B. (2012) *A Study of Braids*. Mathematics and Its Applications. Springer, Netherlands.
- [7] Murasugi, K. (2009) *Knot Theory and Its Applications*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, Boston.
- [8] Prasolov, V.V. and Sossinsky, A.B. (1997) *Knots, Links, Braids, and 3-manifolds: An Introduction to the New Invariants in Low-dimensional Topology*. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society.